

ORSAY

Série A

N° 233

T H E S E S

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES DE
L'UNIVERSITE DE PARIS

- Centre d'ORSAY -

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES

par

C. PASCAUD

1ère Thèse : Etude de la violation de CP dans les désintégrations
en trois corps des mésons K^0 .

2ème Thèse : Propositions données par la Faculté

Soutenues le 26 Avril 1967 devant la Commission d'Examen

MM. A. Blanc-Lapierre

Président

M. Lévy

Examineurs

A. Lagarrigue

ORSAY

Série A

N° 233

T H E S E S

présentées

A L A F A C U L T E D E S S C I E N C E S D E
L' U N I V E R S I T E D E P A R I S

- Centre d'ORSAY -

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES

par

C. PASCAUD

1ère Thèse : Etude de la violation de CP dans les désintégrations
en trois corps des mésons K^0 .

2ème Thèse : Propositions données par la Faculté

Soutenues le 26 Avril 1967 devant la Commission d'Examen

MM. A. Blanc-Lapierre

Président

M. Lévy

Examineurs

A. Lagarrigue

SOMMAIRE

Pages

INTRODUCTION

1ère partie - Aspects théoriques de la désintégration des mésons K^0

Rappel historique - plan

CHAPITRE I - Les états K^0 , leurs états de désintégration 7

Introduction

A - Désintégrations en deux pions

B - Désintégrations en trois pions

C - Désintégrations leptoniques

CHAPITRE II - Rappel de la théorie avec CP conservé 16

A - Définition des états $|K_1^0\rangle$ et $|K_2^0\rangle$

B - Désintégrations des mésons K_1^0 et K_2^0

C - Conséquences de l'expérience de Christenson et al.

CHAPITRE III - Théorie avec CP non conservé 25

Introduction

Remarque préliminaire

A - La désintégration des particules

B - Résumé et applications au système $K^0 \bar{K}^0$

C - Expériences possibles

D - Désintégrations en présence de matière - Régénération

E - Conclusion

- A - Désintégrations en deux pions
- B - Représentation graphique
- C - Désintégrations en trois pions
- D - Désintégrations leptoniques
- E - Origines possibles de la violation de CP

2ème partie - Etude expérimentale des modes de désintégrations des K^0

Introduction

CHAPITRE I - Dispositif expérimental

76

- A - Etude du mode $\pi^+ \pi^-$
- B - Le mode $K^0 \rightarrow 3\pi^0$
- C - Le mode $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$
- D - Le mode $K^0 \rightarrow \pi e \nu$
- E - Le mode $K^0 \rightarrow \pi \mu \nu$

CHAPITRE II - Analyse cinématique des désintégrations K_S

85

- A - La mesure
- B - La cinématique
- C - Poids des origines

CHAPITRE III - Le maximum de vraisemblance

98

- A - Cas d'événements à une seule origine
- B - Corrections dues aux conditions expérimentales
- C - Cas des événements à plusieurs origines
- D - Les événements ambigus

- A - Principe de la méthode de Monte-Carlo
- B - Etude de quelques cas plus particuliers
- C - Calcul des courbes "pseudo théoriques" pour le mode K_{β}

CHAPITRE V - Résultats expérimentaux

133

- A - La violation de CP dans le mode $\pi e \nu$
- B - La violation de CP dans le mode $\pi^+ \pi^- \pi^0$

Conclusion. 144

Tableaux 147

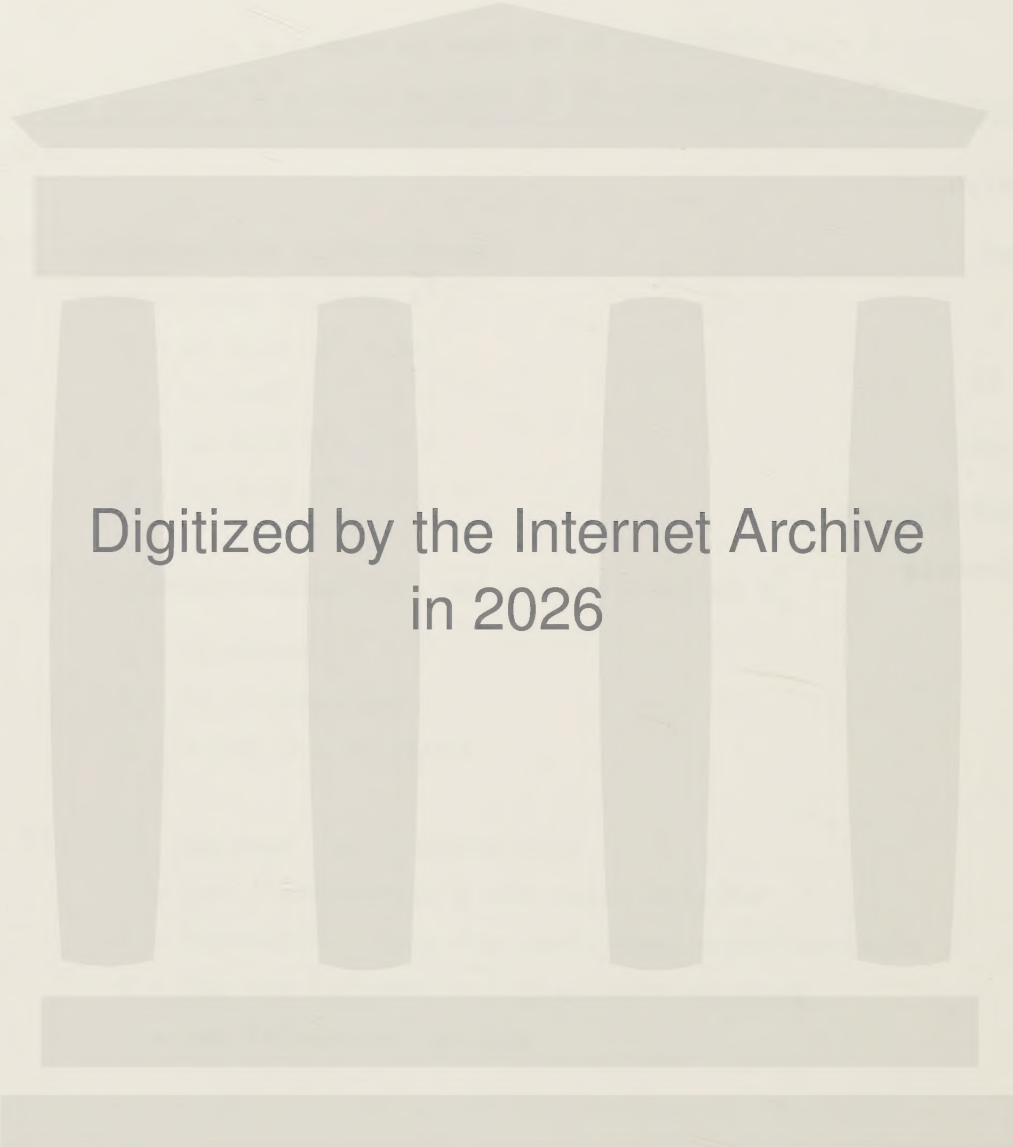
Annexe I 150

Annexe II 159

Références 163

Liste des figures 166

Remerciements



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549028_0014

INTRODUCTION.

Le travail présenté ici veut être la conclusion d'une étude des désintégrations en trois corps des mésons K^0 . Cette étude a été faite au moyen de la chambre à liquide lourd de l'Ecole Polytechnique et les résultats avaient déjà presque tous été obtenus (Réf. 1), lorsqu'en 1964, l'expérience (Réf. 2) montra la possibilité d'une non conservation de CP dans la désintégration des mésons K^0 . Il est alors apparu nécessaire de réanalyser entièrement l'expérience pour tenir compte de ce fait.

Nous nous proposons, d'une part d'exposer les résultats ainsi obtenus, d'autre part de décrire certaines des méthodes expérimentales qui ont permis de mener à bien ces études.

La désintégration du méson K^0 est un phénomène compliqué : En effet, le méson K^0 et son anti-particule $\bar{K}^0$, qui ont la même masse, ont des modes de désintégration communs, par exemple : $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ et $\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$, avec des probabilités de désintégration par unité de temps qui peuvent être voisines. Il faut alors considérer la désintégration d'un mélange de deux particules : la superposition, au sens de la mécanique quantique, de deux états se désintégrant suivant le même mode. C'est un exemple unique d'une telle superposition, ce qui en fait son grand intérêt.

Les conséquences expérimentales d'une telle situation sont extrêmement spectaculaires. En particulier, la loi de désintégration n'est plus une loi exponentielle comme pour les autres particules (atomes radioactifs, par exemple), mais une loi plus compliquée.

La probabilité d'une désintégration suivant un type particulier ($K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$, par exemple), à partir d'un K^0 produit, est comme nous le verrons

plus loin une loi de la forme * :

$$p(t) = A e^{-t/\tau_S} + B e^{-t/\tau_L} + 2 \sqrt{AB} e^{-t/2 (1/\tau_S + 1/\tau_L)} \cos(\Delta m t + \phi)$$

Cette loi dépend de six paramètres dont trois τ_S , τ_L et Δm sont les mêmes pour tous les modes de désintégration.

Diverses considérations théoriques permettent moyennant certaines hypothèses de trouver des relations entre les différents paramètres mis en jeu; la tâche du physicien expérimentateur est, par l'observation des phénomènes décelables, en particulier par l'étude du nombre de désintégrations en fonction du temps, de mesurer ces paramètres, de voir s'ils vérifient ces relations et donc de confirmer ou d'infirmer les hypothèses faites.

La première partie de ce travail sera donc consacrée à présenter l'aspect théorique de ces phénomènes.

En particulier, nous exposerons quelles contributions apportent, au problème de la non conservation de CP, l'étude des différents modes de désintégration des mésons K^0 .

Dans la deuxième partie, nous traiterons des dispositifs et méthodes expérimentaux particuliers à cette expérience; puis nous rendrons compte des résultats ainsi obtenus.

* - On rencontre aussi en physique nucléaire des lois d'apparition de produits de désintégrations qui sont la somme d'exponentielles de vies moyennes différentes, mais la cause de ce phénomène est tout à fait différente : On a affaire ici à la désintégration d'atomes, dont les produits sont eux-mêmes des atomes radioactifs et qui se désintègrent avec leur propre vie moyenne et on peut dire que le nombre d'exponentielles dans la loi de désintégration est égal au nombre de "générations" reliant l'atome de départ et l'atome d'arrivée. Il faut souligner d'ailleurs qu'on ne rencontre jamais alors de terme oscillant de la forme $e^{-\alpha t} \cos \beta t$, comme dans le cas de la désintégration du K^0 .

Ière PARTIE

ASPECTS THEORIQUES DE LA DESINTEGRATION DES MESONS K⁰

RAPPEL HISTORIQUE

Il semble que l'on puisse bien caractériser les mésons K par leur incroyable habileté dans l'art de poser des problèmes aux physiciens.

La première indication de l'existence d'un méson K date de 1944 (Réf. 3). Jusqu'en 1953 (date de la mise en route de l'accélérateur de Brookhaven) furent observés dans les rayons cosmiques plusieurs types de particules, dites étranges.

En 1953, Gell-Mann et Nishijima (Réf. 4) introduisent un nouveau nombre quantique, l'étrangeté, pour expliquer la production associée de ces particules, comme par exemple dans la réaction

$$\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0$$

Ceci conduit à introduire deux doublets de spin isotopique : $K^+ K^0$ d'étrangeté $S = 1$ et $K^- \bar{K}^0$ avec $S = -1$.

L'étrangeté n'étant pas conservée dans la désintégration des particules étranges, le K^0 et son anti-particule $\bar{K}^0$ peuvent se désintégrer suivant les mêmes modes $\pi^+ \pi^-$, par exemple.

On ne peut donc en observant les désintégrations de ces particules neutres, dans une chambre à bulles par exemple, dire si on voit un K^0 ou $\bar{K}^0$.

D'autre part, à cette époque, on croyait que les interactions des particules étaient invariantes sous les opérations suivantes:

C conjugaison de charge (qui consiste à changer la charge des particules),
P parité (réflexion par rapport à un point de l'espace), T (renversement du "cours du temps").

La définition de C conduit à poser :

$$|\overline{K}^0\rangle = C |K^0\rangle$$

$$|K^0\rangle = C |\overline{K}^0\rangle$$

Or un état $\pi^+\pi^-$ de moment angulaire déterminé se trouve dans un état propre de la conjugaison de charge $C = (-1)^L$.

La conservation de C conduit donc à dire que ni K^0 ni $\overline{K}^0$ ne peuvent se désintégrer en $\pi^+\pi^-$ car ils ne sont pas états propres de C.

En 1955, Gell-Mann et Pais (Réf. 5) montrent que, suivant le principe de superposition des états en mécanique quantique, ce ne sont pas K^0 ou $\overline{K}^0$ qui se désintègrent, mais deux combinaisons linéaires, valeurs propres de C, soient :

$$|K_1^0\rangle = \frac{|K^0\rangle + |\overline{K}^0\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|K_2^0\rangle = \frac{|K^0\rangle - |\overline{K}^0\rangle}{\sqrt{2}}$$

Ils attribuent aux K_1^0 les désintégrations en $\pi^+\pi^-$ avec une vie moyenne $\sim 10^{-10}$ secondes et ils prédisent l'existence d'une composante K_2^0 à beaucoup plus longue vie moyenne (car elle ne peut se désintégrer en deux π). Cette prédiction est confirmée en 1956 par Landé (Réf. 6).

Les difficultés suivantes vont venir des K^+ . En effet, en 1956, des mesures de masses et de vies moyennes (Réf. 7) montrent que les processus observés $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ et $K^+ \rightarrow 2\pi^+$ devaient être en réalité des modes de

désintégrations d'une même particule, le méson K^+ , tandis que les parités des deux états finals $\pi^+\pi^0$ et $2\pi^+\pi^-$ étant opposées la conservation de la parité interdit à θ^+ et τ^+ d'être identiques. Ceci conduisit Lee et Yang à montrer que la conjugaison de charge et la parité pouvaient ne pas être conservées dans les interactions faibles (Réf. 8). L'expérience de Wu sur la désintégration des noyaux de Co^{60} polarisés leur donna bientôt raison. (Réf. 9).

A partir de 1957, on pense donc que C et P ne sont pas conservés dans les interactions faibles, mais que T et le produit CP le sont. Ceci conduit à modifier légèrement le traitement de Gell-Mann et Pais en faisant maintenant jouer à CP le rôle de C, c'est-à-dire que l'on pose :

$$CP |K^0\rangle = |\overline{K}^0\rangle$$

$$CP |\overline{K}^0\rangle = |K^0\rangle$$

Jusqu'en 1964, la situation ne va plus guère évoluer. Des mesures de plus en plus précises sont seulement faites.

Les modes de désintégrations sont alors les suivants :

- Le K_1^0 a une vie moyenne approximativement de 10^{-10} secondes.

Ses modes de désintégrations principaux sont :

$$K_1^0 \rightarrow \pi^+\pi^- \quad \sim 70\%$$

$$K_1^0 \rightarrow \pi^0\pi^0 \quad \sim 30\%$$

- Le K_2^0 a une vie moyenne approximativement de $5 \cdot 10^{-8}$ secondes.

Ses modes de désintégrations principaux sont :

$$K_2^0 \rightarrow \pi^\pm e^\mp \nu \quad \sim 38\%$$

$$K_2^0 \rightarrow \pi^\pm \mu^\mp \nu \quad \sim 27\%$$

$$K_2^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0 \quad \sim 12\%$$

$$K_2^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0 \quad \sim 23\%$$

Il existe encore d'autres modes de désintégrations beaucoup plus rares : $K^0 \rightarrow \pi \pi \gamma$ et $K^0 \rightarrow \pi^\pm \pi^0 e^\mp \nu$ ou $K^0 \rightarrow \pi^\pm \pi^0 \mu^\mp \nu$.

La conservation de CP interdit les désintégrations suivantes :

$$K_1^0 \rightarrow 3\pi \quad \text{et} \quad K_2^0 \rightarrow 2\pi$$

En 1964, l'expérience (Réf. 2) montre qu'au contraire, la désintégration $K_2^0 \rightarrow 2\pi$ est possible, dans des proportions extrêmement faibles il est vrai, puisque le rapport des taux de désintégration du K_2^0 et du K_1^0 a été trouvé de :

$$\frac{R(K_2^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{R(K_1^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)} \sim 4 \cdot 10^{-6}$$

L'objet de cette première partie sera de montrer comment ceci a conduit à penser que CP lui-même n'était pas conservé dans les interactions faibles et quelles en sont les conséquences pour la désintégration du méson K^0 .

PLAN DE LA PREMIERE PARTIE

Dans le chapitre I, nous exposerons les rapports entre ces opérateurs C, P et T, dont l'étude précédente nous a montré l'importance, et les états du méson K neutre, ainsi que ses états de désintégration; nous examinerons aussi les différentes règles de sélection proposées pour rendre compte de certains faits expérimentaux.

Le chapitre II exposera brièvement l'état de la théorie en 1964 et indiquera les diverses explications proposées pour rendre compte de la désintégration $K_2^0 \rightarrow 2\pi$.

Dans le chapitre III, nous présenterons la théorie faisant appel à la violation de CP et qui semble être la meilleure actuellement.

Le chapitre suivant sera consacré à l'étude des conséquences d'une telle théorie pour les différents modes de désintégration.

CHAPITRE I : LES ETATS K^0 , LEURS ETATS DE DESINTEGRATION

INTRODUCTION

Nous avons vu qu'historiquement le $\overline{K}^0$ a été défini à partir du K^0 par la relation $C|K^0\rangle = |\overline{K}^0\rangle$, puis par $CP|K^0\rangle = |\overline{K}^0\rangle$. Lorsque l'on ne regarde que les interactions fortes, ces deux définitions sont équivalentes, puisque P est un invariant des interactions fortes, mais la deuxième est plus commode lorsqu'il s'agit de définir les états propres de CP pour examiner les interactions faibles des K.

Une analyse détaillée des opérateurs unitaires ou anti-unitaires C, P et T, a conduit Lee (Réf. 10) à montrer qu'ils sont définis par un type d'interactions données, et à introduire plusieurs opérateurs pour les différents types d'interactions fortes, électromagnétiques ou faibles : $C_{st}, P_{st}, T_{st}; C_\gamma, P_\gamma, T_\gamma$ et C_w, P_w, T_w . Ces différents opérateurs C, P ou T pouvant être ou ne pas être identiques.

D'autre part, on peut montrer que sous des conditions très générales (invariance par rapport aux transformations de Lorentz, localité des interactions etc... (Réf. 11)), le produit des trois opérateurs C P T pris dans n'importe quel ordre est un invariant :

$$C_{st} P_{st} T_{st} = C_\gamma P_\gamma T_\gamma = C_w P_w T_w \quad \text{invariant}$$

Il semble donc que la meilleure manière de définir les anti-particules à partir des particules est de se donner la relation :

$$C P T |A\rangle = |\bar{A}\rangle \quad *$$

En particulier $|K^0\rangle$ étant l'état de un K^0 (au repos) $|\bar{K}^0\rangle$ sera l'état d'un anti K^0 au repos.

Nous ferons également la convention suivante : on peut choisir une représentation et la phase arbitraire de T de telle sorte que pour un système sans spin, comme le méson K et ses produits de désintégration, on ait :

$$T |A\rangle = |A\rangle$$

THEOREME C P T

Nous noterons H l'hamiltonien du système. L'amplitude de désintégration d'un état, par exemple $|K\rangle$ vers un état $|n\rangle$ sera définie par

$$(K \rightarrow n) = \sqrt{2\pi\rho} \langle n | H | K \rangle \quad ** \quad (1)$$

Nous supposerons toujours que le théorème CPT est valide; c'est-à-dire que l'hamiltonien total H commute avec les produits des trois opérateurs C, P, T.

* - Il faut noter que C P T étant un opérateur anti unitaire ne peut avoir d'état propre : il transforme une particule entrante en une particule sortante. Ou selon le formalisme de la théorie quantique des champs, il transforme un opérateur créant une particule en un point r à l'instant t, en un opérateur créant une anti-particule en un point -r à l'instant -t.

** - ρ représente la densité des états finals n. La raison du facteur $\sqrt{2\pi\rho}$ apparaîtra dans le chapitre III.

Une conséquence du théorème CPT est que l'on a pour deux états $|K\rangle$ et $|A\rangle$

$$\langle \bar{K} | H | \bar{A} \rangle = \langle K | H | A \rangle^* \quad (2)$$

Ceci se démontre en utilisant les règles opératoires relatives aux transformations anti unitaires des opérateurs linéaires et des vecteurs (Réf. 12).

L'INVARIANCE CP

Si CP commute avec H, d'après le théorème CPT, T commute aussi avec H. $|A\rangle$ étant un état de désintégration du K, on a alors

$$\langle K | H | A \rangle = \langle K T^+ | T H T^+ | T A \rangle^* = \langle K | H | A \rangle^*$$

C'est-à-dire que toutes les amplitudes de désintégration sont en ce cas réelles.

Nous allons maintenant rapidement passer en revue les modes de désintégrations du K^0 , ainsi que les problèmes particuliers qui s'y rattachent. L'état initial K^0 a un spin isotopique $1/2, -1/2$; nous noterons le spin isotopique de l'état final I. Nous nous intéresserons également aux désintégrations correspondantes du K^+ , car elles peuvent être liées à celles du K^0 par des transformations dans l'espace du spin isotopique.

A - DESINTEGRATION EN DEUX PIONS

Les modes de désintégrations que nous envisageons sont les suivants :

$$\begin{array}{ll} K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- & \overline{K}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \\ K^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 & \overline{K}^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \\ K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 & \end{array}$$

Le spin du K étant nul, le moment angulaire sera $L = 0$. La statistique de Bose interdisant l'état $I = 1$, un système de 2π ne peut se trouver que dans les états $I = 0$ et $I = 2$.

De plus si la charge totale des 2π est nulle, ils seront dans l'état propre de CP, $CP = +1$.

Nous noterons les amplitudes de désintégrations :

$$\mathcal{A}(K^0 \rightarrow 2\pi_{I=0}) = A_0$$

$$\mathcal{A}(K^0 \rightarrow 2\pi_{I=2}) = A_2$$

Nous pouvons encore choisir une phase arbitraire de telle façon que A_0 soit réel. L'application du principe de l'indépendance de charge permet d'écrire après un calcul de coefficients de Clebsch-Gordan

$$\mathcal{A}(K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) = \mathcal{A}(\overline{K}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)^* = \sqrt{2/3} A_0 + \sqrt{1/3} A_2$$

$$\mathcal{A}(K^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0) = \mathcal{A}(\overline{K}^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0)^* = -\sqrt{1/3} A_0 + \sqrt{2/3} A_2$$

$$\mathcal{A}(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0) = A_2^*$$

*** - En réalité A_2 est la somme de deux termes : une amplitude $\Delta I = 3/2$ et une amplitude $\Delta I = 5/2$. La relation écrite suppose que $\Delta I = 5/2$ est négligeable devant $\Delta I = 3/2$.

Invariance CP.

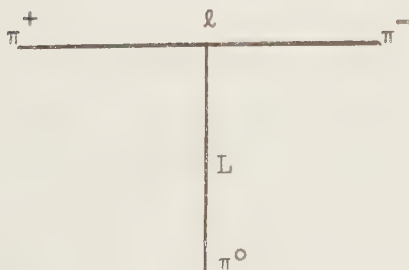
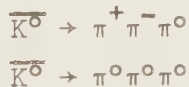
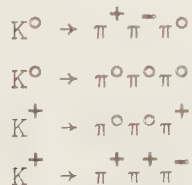
Elle impose aux amplitudes d'être réelles, c'est-à-dire $\text{Im } A_2 = 0$.

Règle $\Delta I = 1/2$ non leptonique

Elle stipule que la spin isotopique de l'état final doit différer de celui de l'état initial de $1/2$. Ici elle impose $A_2 = 0$. Ceci est en contradiction avec l'expérience puisque la désintégration $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$ existe, mais la comparaison des taux de désintégration du K^+ et du K^0 montre que $|\frac{A_2}{A_0}|$ est de l'ordre de quelques pourcents.

B - DESINTEGRATION EN TROIS PIONS

Les modes de désintégrations que nous envisageons, maintenant, sont les suivants



La figure ci-contre montre les assignations de moment angulaire que nous faisons : l est le moment angulaire de deux des π , L celui du système formé par ces deux π avec le troisième (nous choisirons pour troisième celui qui semble le plus "différent", c'est toujours le troisième de la liste de réactions ci-dessus).

Le spin du K étant nul, on doit avoir $l = L$

On peut avoir des moments angulaires $l = 0, 1, 2, 3 \dots$

Mais les amplitudes de désintégrations vers les états de moment angulaire élevés seront très affaiblies par la double barrière centrifuge.

Les états de spin isotopiques possibles sont : $I = 0, 1, 2, 3$.
 Nous noterons donc les amplitudes de désintégration sous la forme : $A_{I,\ell}$
 Pour les K^+ $I_3 = 1$ donc $I = 0$ est absent.

Si on applique l'opération conjugaison de charge C à un système de 3π de charge totale nulle, on obtient

$$C |\pi^+ \pi^- \pi^0\rangle = (-1)^\ell |\pi^+ \pi^- \pi^0\rangle \text{ et } C |3\pi^0\rangle = |3\pi^0\rangle$$

Le facteur $(-1)^\ell$ vient de la nécessité d'échanger le π^+ et le π^- pour retrouver l'état initial; dans le cas de $3\pi^0$ il est inutile d'effectuer cette opération mais si on effectue quand même l'échange de deux premiers π^0 on doit retrouver le même état, on a donc $(-1)^\ell = 1$, c'est-à-dire ℓ est pair pour l'état $|3\pi^0\rangle$.

D'autre part, la G parité de 3π est $G = -1 = Ce^{i\pi} I_2$
 pour le K^0 les 3π sont tels que $I_3 = 0$

$$\text{or } e^{i\pi} I_2 |I, 0\rangle = (-1)^I |I, 0\rangle$$

$$\text{donc } C |3\pi\rangle_0 = (-1)^{I+1} |3\pi\rangle_0$$

Ceci permet de dire que pour $\pi^+ \pi^- \pi^0$ $\ell + I + 1$ est pair et pour $3\pi^0$, ℓ et $I + 1$ sont pairs.

De plus 3π de charge totale nulle sont états propres de CP avec la valeur $(-1)^{\ell+1}$.

Enfin d'après le théorème CPT

$$\langle \bar{K} | H | 3\pi \rangle_0 = \langle K | H | \overline{3\pi} \rangle_0^* = \langle K | H | CP | 3\pi \rangle_0^* = (-1)^{\ell+1} \langle K | H | 3\pi \rangle_0^*$$

Toutes ces relations nous permettent d'écrire les amplitudes et les règles de sélection qui suivent :

$$K^+ \rightarrow 3\pi \quad A_{I,\ell} \quad \text{avec} \quad I = 1, 2, 3$$

$$K^0 \rightarrow 3\pi \quad A_{I,\ell} \quad \text{avec} \quad I = 0, 1, 2, 3$$

$$\overline{K}^0 \rightarrow 3\pi \quad A_{I,\ell}^* (-1)^{\ell+1}$$

$$\text{avec pour } 3\pi^0 \quad I = 1, 3 \quad \ell = 0, 2, \dots \quad PC = -1$$

$$\pi^+ \pi^- \pi^0 \quad I = 1, 3 \quad \ell = 0, 2, \dots \quad PC = -1$$

$$I = 0, 2 \quad \ell = 1, 3, \dots \quad PC = +1$$

Remarques

Pour décrire l'état de spin isotopique de 3π , on doit composer trois spins isotopiques 1. Cette addition de moment cinétique peut se faire en utilisant les coefficients de Racah. L'étude montre que les nombres quantiques I et I_3 ne sont pas suffisants à décrire l'état isotopique de 3π : il en faut un troisième, I_{12} spin isotopique des π 1 et 2 par exemple. Donc en réalité, nos amplitudes $A_{I,\ell}$ dépendent d'un troisième paramètre : il existe un état $I = 0$; 3 états $I = 1$ dont l'un est complètement symétrique dans l'échange des 3π ; 2 états $I = 2$ et un état $I = 3$.

La statistique de Bose imposant à la fonction d'onde des 3π d'être complètement symétrique, on a des règles de sélection entre les variables angulaires (ℓ) et les variables de spin isotopique (I_{12}).

Invariance CP

Elle impose aux amplitudes d'être réelles : $A_{I,\ell}^* = A_{I,\ell}$

Règle $\Delta I = 1/2$ non leptonique

Elle ne permet de désintégrations que vers les états $I = 0$ et $I = 1$. Si de plus, on se restreint aux moments angulaires $\ell = 0$, seuls importants, il ne reste que l'amplitude $A_{1,0}$ et il existe alors des relations entre les taux de désintégrations du K^+ et du K^0 .*

C - DESINTEGRATIONS LEPTONIQUES

Les modes de désintégrations possibles sont :

$$K^0 \rightarrow \pi^+ \ell^- \bar{\nu}$$

$$K^0 \rightarrow \pi^- \ell^+ \nu$$

$$K^+ \rightarrow \pi^0 \ell^+ \nu$$

Le lepton étant, soit un électron, soit un muon.

Nous noterons les amplitudes de désintégration

$$K^0 \rightarrow \pi^+ \ell^- \bar{\nu}$$

$$g^* = a_{3/2, 3/2}^*$$

$$\bar{K}^0 \rightarrow \pi^- \ell^+ \nu$$

$$g = a_{3/2, 3/2}$$

$$K^0 \rightarrow \pi^- \ell^+ \nu$$

$$f = \sqrt{2/3} a_{1/2, 1/2} + \sqrt{1/3} a_{3/2, 1/2}$$

$$\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ \ell^- \bar{\nu}$$

$$f^* = \sqrt{2/3} a_{1/2, 1/2}^* + \sqrt{1/3} a_{3/2, 1/2}^*$$

$$K^+ \rightarrow \pi^0 \ell^+ \nu$$

$$\sqrt{1/3} a_{1/2, 1/2} - \sqrt{2/3} a_{3/2, 1/2}$$

Les facteurs $\sqrt{2/3}$ et $\sqrt{1/3}$ sont des coefficients de Clebsch Gordan.

* - Ces relations sont données chapitre V, équations 11, 13, 14.

Invariance CP

Elle impose aux amplitudes $a_{1/2, 1/2}$ $a_{3/2, 1/2}$ et $a_{3/2, 3/2}$ d'être réelles.

Règle $\Delta S = \Delta Q$

Elle a été proposée par Feynman et Gell-Mann en 1958 (Réf. 13) et stipule que pour les désintégrations leptoniques, la différence d'étrangeté entre la particule, à interactions fortes, initiale et les particules, à interactions fortes, finales, soit égale à la différence de leurs charges.

Ici elle implique que g ou $a_{3/2, 3/2}$ soit nul.

Règle $\Delta I = 1/2$ Leptonique

Son énoncé est le même que celui de la règle $\Delta I = 1/2$ non leptonique. Elle implique que la seule amplitude non nulle soit $a_{1/2, 1/2}$. On peut alors décrire la désintégration du K^+ et du K^0 avec une seule amplitude et on a une relation entre les taux de désintégration du K^+ et du K^0 .

CHAPITRE II : RAPPEL DE LA THEORIE AVEC CP CONSERVE

en
Ayant décrit les différentes amplitudes/jeu dans la désintégration des K , nous pouvons maintenant aborder l'étude de la désintégration proprement dite, c'est-à-dire en particulier voir comment la théorie permet de déduire de ces amplitudes la distribution en fonction du temps des désintégrations suivant chacun des modes possibles.

Jusqu'à ces dernières années, la théorie des interactions faibles postulait l'invariance CP, aucune expérience n'ayant infirmé une telle hypothèse.

Nous allons donc d'abord exposer brièvement dans ce cadre la théorie de la désintégration des K .

A - DEFINITION DES ETATS $|K_1^0\rangle$ et $|K_2^0\rangle$

Considérons les états :

$$|K_1^0\rangle = \frac{|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2}} \quad |K_2^0\rangle = \frac{|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

les formules inverses étant :

$$|K^0\rangle = \frac{|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle}{\sqrt{2}} \quad |\bar{K}^0\rangle = \frac{|K_1^0\rangle - |K_2^0\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

comme $CP |K^0\rangle = CPT |\bar{K}^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle$, on en déduit facilement que $CP |K_1^0\rangle = |K_1^0\rangle$ et $CP |K_2^0\rangle = -|K_2^0\rangle$

les états $|K_1^0\rangle$ et $|K_2^0\rangle$ sont donc des états propres de CP avec respectivement les valeurs propres $+1$ et -1 .

Si CP commute avec H, donc est un bon nombre quantique, tout état de désintégration des K étant état propre de CP, ne pourra être atteint qu'à partir de l'état $|K_1^0\rangle$ ou $|K_2^0\rangle$ ayant même valeur de CP.

En particulier, seul $K_1^0 \rightarrow 2\pi$

$$K_2^0 \rightarrow 3\pi^0$$

$$K_2^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 \quad I = 1,3 \quad \ell = 0,2$$

$$K_1^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 \quad I = 0,2 \quad \ell = 1,3$$

Pour les modes leptoniques, on ne peut donner de telles règles simples, car $\pi l \nu$ n'est pas un état propre de CP.

En fait nous verrons que K_1^0 et K_2^0 peuvent se désintégrer tous les deux suivant les modes leptoniques.

B - DESINTEGRATIONS DES MESONS K_1^0 ET K_2^0

Nous allons exposer ici de manière très rapide et intuitive, comment on représente la désintégration du système $K^0 \bar{K}^0$, réservant pour le chapitre suivant une démonstration plus rigoureuse dans le cas le plus général des propriétés que nous allons mettre ici en évidence.

Ce que nous avons dit dans le paragraphe précédent montre que K_1^0 et K_2^0 sont les vraies particules à considérer du point de vue de la désintégration. Introduisons donc un espace vectoriel de base $|K_1^0\rangle$ et $|K_2^0\rangle$, tout état du système sera un vecteur de cet espace.

Si nous partons d'un K_i^0 au repos (K_1^0 ou K_2^0) représenté par un vecteur $|K_i^0\rangle$ de l'espace des états de la mécanique quantique, nous décrirons l'état de ce K_i^0 au temps t par le vecteur

$$|\Psi_i\rangle = e^{-t/\tau_i - i\omega_i t} |K_i^0\rangle = \Psi_i(t) |K_i^0\rangle$$

ω_i représente la masse du K_i^0 en unité $\frac{h}{c^2}$. $e^{-i\omega_i t}$ est, en accord avec les résultats de la mécanique quantique, la fonction d'onde pour une particule au repos de masse ω_i . Le terme $e^{-t/2\tau_i}$ rend compte du fait que le K_i^0 se désintègre avec une vie moyenne τ_i , en effet :

$$\langle \Psi_i | \Psi_i \rangle = e^{-t/\tau_i}$$

La probabilité d'avoir une désintégration au temps t est :

$$N_i(t) = -\frac{d}{dt} \langle \Psi_i | \Psi_i \rangle = \frac{1}{\tau_i} e^{-t/\tau_i}$$

Nous voudrions de plus connaître la probabilité d'avoir une désintégration suivant un mode bien déterminé ($\pi^+\pi^-$, $\pi^0\pi^0$, ...) T.

Pour ce faire, définissons comme pour les désintégrations nucléaires des vies partielles pour les différents types de désintégration T :

$$\frac{1}{\tau_i} = \sum_{\text{modes } T} \frac{1}{\tau_i^T}$$

D'une manière analogue à ce qui a lieu pour les sections efficaces de réactions, c'est le carré de l'amplitude de désintégration qui donnera la probabilité de désintégration par unité de temps $\frac{1}{\tau_i^T}$ T; on écrira :

$$\frac{1}{\tau_i^T} = \sum_T |\mathcal{O}_i^T|^2$$

$\mathcal{A}_i^T$ étant l'amplitude de désintégration du K_i^0 vers l'état T.

$\mathcal{A}_i^T$ peut se calculer à partir des formules de transformation (équations 1 et 2) permettant de passer de $|K^0\rangle$, $|\bar{K}^0\rangle$ à $|K_1^0\rangle$, $|K_2^0\rangle$, en fonction de $\mathcal{A}(K^0 \rightarrow T)$ et $\mathcal{A}(\bar{K}^0 \rightarrow T)$ car ce sont des éléments de matrice comme nous l'avons défini au chapitre I.

$$\text{On peut donc écrire } N_i(t) = \sum_T |\mathcal{A}_i^T|^2 e^{-t/\tau_i} = \sum_T |\mathcal{A}_i^T \Psi_i(t)|^2$$

Nous voyons alors que la probabilité de désintégration vers l'état T est $|\mathcal{A}_i^T \Psi_i(t)|^2$ c'est le carré de l'amplitude de désintégration vers l'état T pour un état $|\Psi_i(t)\rangle$.

Considérons maintenant au temps $t = 0$, non plus un K_1^0 ou un K_2^0 au repos, mais une superposition linéaire de ces deux états (comme K^0 ou $\bar{K}^0$ par exemple) $|\Psi(t)\rangle = C_1 |K_1^0\rangle + C_2 |K_2^0\rangle$

Nous voulons savoir qu'elle sera au temps t, l'état du système, soit $|\Psi(t)\rangle$ ainsi que les diverses probabilités de désintégrations.

Connaissant deux solutions particulières au problème $|\Psi_1(t)\rangle$ et $|\Psi_2(t)\rangle$, d'après le principe de superposition des états, nous écrirons:
 $|\Psi(t)\rangle = C_1 |\Psi_1(t)\rangle + C_2 |\Psi_2(t)\rangle$

$$\text{soit } |\Psi(t)\rangle = C_1 e^{-t/2\tau_1 - i\omega_1 t} |K_1^0\rangle + C_2 e^{-t/2\tau_2 - i\omega_2 t} |K_2^0\rangle$$

La loi de désintégration vers l'état T, s'écrira :

$$\begin{aligned} N^T(t) &= |C_1 \mathcal{A}_1^T e^{-t/2\tau_1 - i\omega_1 t} + C_2 \mathcal{A}_2^T e^{-t/2\tau_2 - i\omega_2 t}|^2 \\ N^T(t) &= |C_1|^2 |\mathcal{A}_1^T|^2 e^{-t/\tau_1} + |C_2|^2 |\mathcal{A}_2^T|^2 e^{-t/\tau_2} + 2e^{-t/2(1/\tau_1 + 1/\tau_2)} \\ &\quad \left\{ \text{Re} (C_1^* C_2 \mathcal{A}_1^{T*} \mathcal{A}_2^T) \cos \Delta m t - \text{Im} (C_1^* C_2 \mathcal{A}_1^{T*} \mathcal{A}_2^T) \sin \Delta m t \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

$\Delta m = \omega_1 - \omega_2$ est la différence entre les masses du K_1^0 et du K_2^0 .

Pour avoir la loi de désintégration de l'état considéré, on doit sommer sur tous les types T de désintégration.

Or, l'invariance par rapport à CP entraîne que :

$$\begin{aligned} \sum_T \mathcal{A}_1^T \mathcal{A}_2^{T*} &= 2\pi \sum_T \langle K_1^0 | (CP)^{+*} H CP | T \rangle \langle T | (CP)^{+*} H CP | K_2^0 \rangle \\ &= -2\pi \sum_{T'} \langle K_1^0 | H | T' \rangle \langle T' | H | K_2^0 \rangle = - \sum_{T'} \mathcal{A}_1^{T'} \mathcal{A}_2^{T'*} \end{aligned}$$

soit
$$\sum_T \mathcal{A}_1^T \mathcal{A}_2^T = 0 \quad (4)$$

$$\text{Donc } N(t) = |C_1|^2 \frac{1}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} + |C_2|^2 \frac{1}{\tau_2} e^{-t/\tau_2}$$

La loi de désintégration vers tous les états est bien la superposition des lois de désintégration du K_1^0 et du K_2^0 .

L'examen de la démonstration ci-dessus montre que la formule (4) est valable encore si l'on fait une somme sur des états se transformant les uns dans les autres par CP.

Ceci montre que nous aurons des termes faisant intervenir $\cos \Delta mt$ ou $\sin \Delta mt$ (on les appelle des termes d'interférence) seulement dans les modes de désintégration $K \rightarrow \pi^- \ell^+ \bar{\nu}$ ou $K \rightarrow \pi^+ \ell^- \nu$, les états finals n'étant pas états propres de CP, cependant si on ne reconnaît pas le signe du lepton, on ne peut voir d'interférence.

L'expérience confirme bien ces prévisions, on a pu mesurer la différence de masse (en particulier en étudiant les termes d'interférence) on obtient $|\Delta m| \sim 0,5 \frac{\hbar}{c^2 \tau_1}$ soit $\frac{\Delta m}{M_{K^0}} \sim 6,5 \cdot 10^{-15}$

Le mode de désintégration $K_1^0 \rightarrow 2\pi$ étant de beaucoup le plus fréquent, on peut écrire :

$$\frac{1}{\tau_1} \sim \frac{1}{\hbar} |A_0(K_1^0 \rightarrow 2\pi)|^2 = 2 A_0^2 \text{ en négligeant } I = 2$$

soit $|A_0|^2 \approx \frac{1}{2\tau_1}$

C - CONSEQUENCES DE L'EXPERIENCE DE CHRISTENSON, CRONIN, FITCH, TURLAY
(Réf. 2)

En Juillet 1964, ces physiciens utilisant un système de chambres à étincelles, ont montré que l'on obtenait des désintégrations K^0 en se plaçant très loin d'une cible produisant des K^0 , c'est-à-dire dans un faisceau de K_2^0 .

Ils ont donné un rapport de branchement :

$$R = \frac{K_2^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-}{K_2^0 \rightarrow \text{modes chargés}} = (2.0 \pm 0.4) 10^{-3} \quad (5)$$

Depuis, l'expérience a été refaite plusieurs fois avec des résultats comparables (Réf. 14)

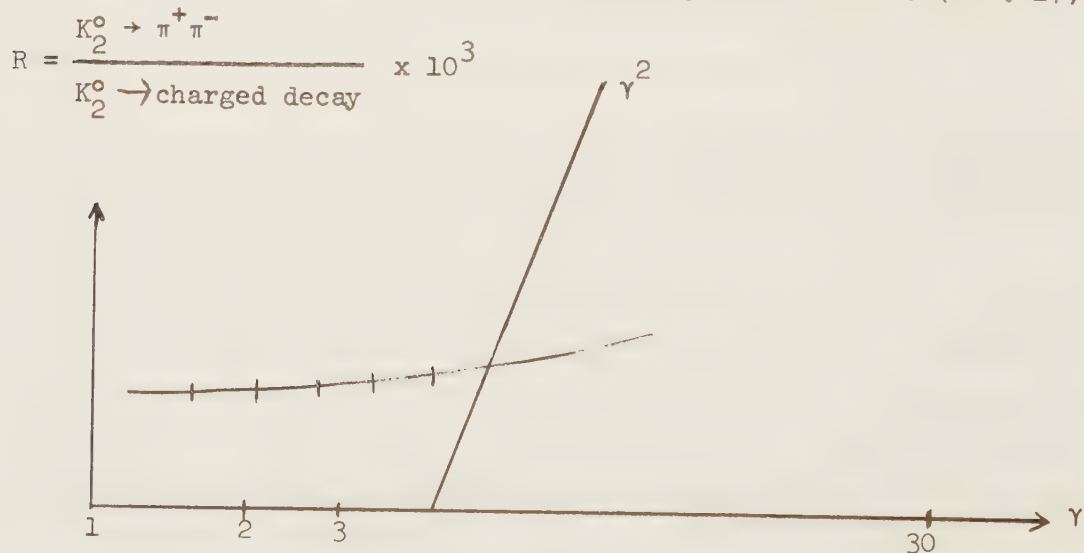
Un tel résultat est en contradiction formelle avec la théorie que nous venons d'exposer puisque nous avons dit que seules les désintégrations $K_1^0 \rightarrow 2\pi$ sont possibles.

Pour rendre compte de ce fait expérimental, on doit donc abandonner au moins une des hypothèses sur lesquelles cette théorie est construite.

Différents physiciens ont donc proposé un certain nombre de théories permettant de rendre compte de cette expérience; nous allons brièvement les exposer et montrer quelles prévisions elles font.

a) Hypothèse d'une force à long rayon d'action

Cette hypothèse a été introduite par Bell et Peering (Réf. 15) et aussi par Bernstein et al. (Réf. 16). Elle suppose l'existence d'une force à très long rayon d'action dépendant par exemple de l'hypercharge. L'hypercharge de la galaxie étant différente de zéro, il y aurait une énergie potentielle de signe opposé pour le K^0 et le $\bar{K}^0$. Si ce champ galactique est vectoriel, on peut montrer que la différence d'énergie entre K et $\bar{K}$ doit être proportionnelle à l'énergie du K , soit un taux de désintégration $K_2^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ proportionnel au carré de l'énergie. Ce qui est manifestement faux, comme le montre le graphique ci-dessous. (Réf. 17).



$$R = R_0 \gamma^n$$

$$n = 0.06 \pm 0.18$$

Cette hypothèse est donc maintenant à rejeter.

b) Hypothèse d'une désintégration $K_2^0 \rightarrow K_1^0 + s$

Ce modèle a été proposé par Lévy et Nauenberg (Réf. 18). Il suppose que K_2^0 se désintègre en K_1^0 et en une particule de masse plus petite que Δm et ayant $PC = -1$. Ce modèle conduit aux prédictions suivantes :

α) $m_2 > m_1$ pour que la désintégration soit possible

β) Le rapport de branchement $\frac{K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-}{K^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0}$ doit être le même, que l'on se place près ou loin de la source de K^0 .

Enfin la distribution des désintégrations $K^0 \rightarrow 2\pi$ en fonction du temps doit être la superposition des deux exponentielles du K_1^0 et du K_2^0 , sans présenter de terme oscillant d'interférence comme le prédisent les autres théories.

c) Théories faisant appel à des nouvelles particules

α) K'^0 se désintégrant en $\pi^+ \pi^-$ avec une longue vie moyenne et même masse que le K^0 . Dans ce cas on aurait probablement une dépendance en énergie de l'effet car le rapport entre les sections efficaces du K'^0 et des $K^0 \bar{K}^0$ doit dépendre de l'énergie.

β) Il existe un π' semblable au π normal et la désintégration $K_2^0 \rightarrow \pi' \pi$ peut alors avoir lieu.

d) Théories mettant en cause des lois plus fondamentales

L'une de ces théories (Réf. 19) suppose que la statistique de Bose ne s'applique pas aux pions. Elle conduit à la prédiction

$$\frac{K_L^0 \rightarrow 2\pi^0}{K_L^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-} = 0$$

Une autre met en cause le principe de superposition (Réf. 20)

e) Théorie CP violé

Cette théorie est celle qui est venue le plus rapidement à l'esprit des physiciens : elle suppose que CP est violé dans la désintégration du K^0 . Il reste dans ce cadre à expliquer par quel phénomène CP est violé. Il y a aussi actuellement plusieurs théories rendant compte de ce point; mais nous allons d'abord exposer la théorie pour ce qui concerne le mécanisme de la désintégration nous réservant de revenir ensuite sur les explications possibles de la violation.

CHAPITRE III : THEORIE AVEC CP NON CONSERVE

INTRODUCTION

CP n'étant plus conservé, nous ne pouvons plus utiliser le K_1^0 et le K_2^0 comme de "vraies particules" vis à-vis de la désintégration. Nous allons donc reprendre notre étude du système. La méthode inductive qui nous a servie dans le chapitre précédent devient ici plus difficile à appliquer. De plus, nous voudrions mettre plus de rigueur dans notre exposé.

Le problème se pose de la manière suivante :

Nous avons un système dont l'hamiltonien est

$$H = H^S + H^W$$

H^S , étant la partie correspondant aux interactions fortes

H^W , la partie correspondant aux interactions faibles

Soit $|\Psi(t)\rangle$ un vecteur de l'espace de Hilbert représentatif de l'état du système.

$|\Psi(t)\rangle$ obéit à l'équation de Schrodinger

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle \quad (1)$$

Choisissons une base de l'espace de Hilbert telle que H^S soit diagonal. Nous noterons les vecteurs de base :

$|\alpha\rangle$ pour les états liés d'énergie E_0 : ce sont pour nous les états $|K^0\rangle$ et $|\overline{K}^0\rangle$ qui sont produits par des réactions ne mettant en jeu que les interactions fortes.

$|n\rangle$ pour les états de désintégration d'énergie E_n : ce sont pour nous les états 2π , 3π , $\pi l v$ etc...

Nous voulons étudier la désintégration des états liés, c'est-à-dire en particulier connaître les lois de désintégration suivant chaque mode.

La résolution de ce problème se fait par des méthodes analogues à celles utilisées dans la théorie des collisions.

L'une de ces méthodes consiste à employer la théorie des perturbations dépendant du temps (on considère H^W comme une petite perturbation). On arrive ainsi à la règle d'or de Fermi qui lie la section efficace du processus (ou la probabilité par unité de temps) aux éléments de matrice de l'hamiltonien de perturbation (H^W).

La méthode de Weisskopf et Wigner (Réf. 21) consiste, dans cette ligne de raisonnement, à vérifier que la décroissance est bien exponentielle.

Une autre méthode consiste à utiliser les développements du formalisme de la matrice S (Réf. 22) et les fonctions de Green. C'est cette méthode que nous allons exposer ici, mais avant de le faire, nous voudrions mettre en évidence la nécessité de considérer un continuum d'états de désintégration.

REMARQUE PRELIMINAIRE

Une méthode de résolution formelle de l'équation (1) pourrait être de diagonaliser l'hamiltonien total H : on obtient un ensemble complet de vecteurs propres orthogonaux $|\lambda\rangle$ de valeurs propres réelles ω_λ .

La solution de (1) est alors :

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{\lambda} e^{-i\omega_{\lambda}t} \langle \lambda | \Psi(0) \rangle$$

$|\Psi(0)\rangle$ étant l'état initial : c'est un état de sous espace des états liés et la probabilité pour le système de ne pas s'être désintégré au temps t , c'est-à-dire d'être encore dans un état lié s'écrit :

$$\sum_{\alpha} \langle \Psi(t) | \alpha \rangle \langle \alpha | \Psi(t) \rangle =$$

$$\sum_{\alpha\lambda\lambda'} \langle \Psi(0) | \lambda \rangle \langle \lambda | \alpha \rangle \langle \alpha | \lambda' \rangle \langle \lambda' | \Psi(0) \rangle e^{i(\omega_{\lambda'} - \omega_{\lambda})t}$$

Si le nombre des états $|\lambda\rangle$ vecteurs propres de H est fini, la probabilité ci-dessus est une fonction périodique de t et ne peut donc pas tendre vers 0 lorsque t tend vers ∞ .

On ne peut donc avoir vraiment une probabilité de désintégration c'est-à-dire à caractère d'exponentielle décroissante que si les $|\lambda\rangle$ forment un spectre continu d'états. Ceci conduit à admettre que les états de désintégrations $|n\rangle$ forment une suite continue d'états d'énergie E_n variable; on peut les séparer en types T différents : états $\pi^+ \pi^-$, $\pi^0 \pi^0$, $\pi^+ \pi^- \pi^0$, etc...

A - LA DESINTEGRATION DES PARTICULES.

Dans cet exposé nous suivrons la méthode et utiliserons les notations de la Réf. 23.

La solution de l'équation (1) est : $|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\Psi(0)\rangle$

avec $|\Psi(0)\rangle = \sum_{\alpha} C_{\alpha} |\alpha\rangle$: l'état initial est un état lié (par exemple : un mélange de K^0 et de $\bar{K}^0$).

Nous voulons connaître les composantes de $|\Psi(t)\rangle$ suivant les états liés $|\alpha\rangle$, c'est-à-dire $\langle\alpha|\Psi(t)\rangle$, ce qui permet de calculer la probabilité pour qu'au temps t le système soit dans l'état $|\alpha\rangle$ c'est-à-dire ne soit pas désintégré.

$$\text{On a } \langle\alpha|\Psi(t)\rangle = \sum_{\beta} C_{\beta} \langle\alpha|e^{-iHt}|\beta\rangle$$

Nous cherchons donc à calculer les éléments de matrices

$$U_{\alpha\beta} = \langle\alpha|e^{-iHt}|\beta\rangle \text{ de l'opérateur d'évolution entre les états liés.}$$

Pour ce faire nous allons supposer que H^W est petit devant H^S et le traiter comme une perturbation $\star$.

$$\text{Introduisons la résolvante } G(z) = \frac{1}{z - H};$$

$$e^{-iHt} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixt}}{x + i\varepsilon - H} dx$$

$$\text{d'où : } U_{\alpha\beta}(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} g_{\alpha\beta}(x + i\varepsilon) dx$$

$$\text{avec : } g_{\alpha\beta}(z) = \langle\alpha|\frac{1}{z - H}|\beta\rangle$$

$g(z)$ est une matrice de l'espace des états liés $|\alpha\rangle$.

$\star$ - On sait que les interactions faibles sont de 10^{-7} à 10^{-14} fois plus faibles que les interactions fortes.

Pour calculer $\frac{1}{z - H}$ nous allons séparer l'hamiltonien total en deux parties $H = H_1 + H''$ de telle manière que H'' n'ait d'éléments non nuls qu'entre des états $|\alpha\rangle$ et des états $|n\rangle$ et vice-versa : on posera donc :

$$\langle \alpha | H'' | n \rangle = \langle \alpha | H | n \rangle = H_{\alpha n}^W \quad \langle n | H'' | \alpha \rangle = H_{n\alpha}''$$

$$\langle \alpha | H_1 | \beta \rangle = \langle \alpha | H | \beta \rangle = H_{\alpha\beta}^S + H_{\alpha\beta}^W$$

$$\langle n | H_1 | m \rangle = \langle n | H | m \rangle = H_{nm}^S + H_{nm}^W$$

les autres éléments étant nuls.

Cette manière de décomposer H permet d'avoir dans H'' les termes responsables des transitions $|\alpha\rangle \rightarrow |n\rangle$ et seulement ceux-là. La figure ci-dessous illustre cette décomposition.

	états liés $ \alpha\rangle$	états de désintégrations $ n\rangle$
$H =$	$H_1 = H^S + H^W$ $H'' = 0$	$H'' = H^W$ $H_1 = 0$
	$H'' = H^W$ $H_1 = 0$	$H_1 = H^S + H^W$ $H'' = 0$

par la suite nous serons amenés à négliger dans H_1 , H^W devant H^S .

Utilisons maintenant l'identité entre opérateurs :

$$\frac{1}{z - H} = \frac{1}{z - H_1} + \frac{1}{z - H_1} H'' \frac{1}{z - H}$$

$$\text{ou : } \frac{1}{z - H} = \frac{1}{z - H_1} + \frac{1}{z - H_1} H'' \frac{1}{z - H_1} + \frac{1}{z - H_1} H'' \frac{1}{z - H} \quad (2)$$

Soit pour les éléments de matrice :

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \frac{1}{z - H} | \beta \rangle &= \langle \alpha | \frac{1}{z - H_1} | \beta \rangle \\ &+ \langle \alpha | \frac{1}{z - H_1} | \gamma \rangle H_{\gamma n}^W \langle n | \frac{1}{z - H_1} | m \rangle H_{m\delta}^W \langle \delta | \frac{1}{z - H} | \beta \rangle \end{aligned}$$

car les termes du type $\langle \alpha | \frac{1}{z - H_1} | n \rangle$ ou $\langle \alpha | H'' | \beta \rangle$ sont nuls.

L'identité ci-dessus peut s'écrire à l'aide de matrices dans l'espace des états liés :

$$g(z) = \frac{1}{z - \mathcal{H}_1} + \frac{1}{z - \mathcal{H}_1} w(z) g(z) \quad (3)$$

Les matrices $\mathcal{H}_1$ et w étant définies par $\langle \alpha | \mathcal{H}_1 | \beta \rangle = \langle \alpha | H_1 | \beta \rangle$

$$\langle \alpha | w(z) | \beta \rangle = H_{\alpha n}^W \langle n | \frac{1}{z - H_1} | m \rangle H_{m\beta}^W$$

(3) peut s'écrire encore

$$g(z) = \frac{1}{z - \mathcal{H}_1 - w(z)}$$

$$U_{\alpha\beta}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} \langle \alpha | \frac{1}{x + i\epsilon - \mathcal{H}_1 - w(x + i\epsilon)} | \beta \rangle dx \quad (4)$$

Cette équation est encore une équation rigoureuse. L'approximation que nous allons faire consiste à remplacer $\mathcal{W}(x + i\epsilon)$ par $\mathcal{W}(E_0 + i\epsilon)$. Cette approximation est justifiée par le fait que les éléments de matrice de $\mathcal{G}(x + i\epsilon)$ ne prennent de valeurs notables qu'au voisinage de $x = E_0$; définissons donc :

$$\mathcal{W}_{\alpha\beta} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \alpha | \mathcal{W}(E_0 + i\epsilon) | \beta \rangle =$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_{\alpha n}^W \langle n | \frac{1}{x + i\epsilon - H_1} | m \rangle H_{m\beta}^W$$

Soit en appliquant l'identité (2) à $H_1 = H_0 + (H_1 - H_0)$

$$\mathcal{W}_{\alpha\beta} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{H_{\alpha n}^W H_{n\beta}^W}{x + i\epsilon - E_n} + \frac{H_{\alpha n}^W H_{nm}^W H_{n\beta}^W}{(x + i\epsilon - E_n)(x + i\epsilon - E_m)} + \dots \right)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{H_{\alpha n}^W H_{m\beta}^W}{E_0 - E_n + i\epsilon}$$

En négligeant les termes d'ordres supérieurs (qui font intervenir d'ailleurs des termes du type H_{nm}^W c'est-à-dire responsables de transition $|n\rangle \rightarrow |m\rangle$ qui ne nous intéressent pas).

La somme est à effectuer sur tous les états $|n\rangle$ qui forment une suite continue d'états virtuels non liés pour chaque type d'état final (pour la désintégration du K , états à 2π par exemple, ou à 3π).

$\rho_T(E)$ étant la densité d'état final de type T

$$\mathcal{W}_{\alpha\beta} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_T \int \frac{H_{\alpha T}^W(E) H_{T\beta}^W(E) \rho_T(E) dE}{E_0 - E + i\epsilon} \quad (5)$$

Soit en séparant partie hermétique et partie anti-hermétique

$$\mathcal{W}_{\alpha\beta} = \Delta_{\alpha\beta} - i \frac{\Gamma_{\alpha\beta}}{2} \quad (6)$$

avec

$$\Delta_{\alpha\beta} = \sum_T \text{PP} \frac{H_{\alpha T}^W(E) H_{T\beta}^W(E)}{E_0 - E} \rho_T(E)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta} = 2\pi \sum_T \rho_T(E_0) H_{\alpha T}^W(E_0) H_{T\beta}^W(E_0) \quad (7)$$

Suivant la formule bien connue reliant $\int \frac{dx}{x + i\varepsilon}$ à une partie principale et une fonction δ .

Nous pouvons maintenant calculer les éléments de matrice $U_{\alpha\beta}(t)$ en remplaçant dans (4) $\mathcal{W}(x + i\varepsilon)$ par $\mathcal{W}$ et en intégrant par la méthode des résidus :

$$U_{\alpha\beta}(t) = \langle \alpha | e^{-i(\mathcal{H}_1 + \mathcal{W})t} | \beta \rangle \quad (8)$$

L'opérateur $\mathcal{H}_1 + \mathcal{W}$ a, sauf accident, un système complet de vecteurs propres $|a\rangle, |b\rangle, \dots$ non orthogonaux, mais que nous pouvons prendre de norme 1; ce sont des états liés, combinaisons linéaires des $|\alpha\rangle$, nous noterons leurs valeurs propres :

$$\begin{aligned} i\lambda_a &= E_0 + \delta a - \frac{1}{2} \gamma_a i \\ (\mathcal{H}_1 + \mathcal{W}) |a\rangle &= i\lambda_a |a\rangle \end{aligned} \quad (9)$$

Si l'état initial est $|a\rangle$ l'opérateur d'évolution (8) nous permet de calculer au temps t la composante suivant les états liés du vecteur état, soit :

$$|\psi_a(t)\rangle = e^{\lambda_a t} |a\rangle + \sum_n C_n(t) |n\rangle$$

et la probabilité de trouver le système dans l'état initial au temps t est :

$$| \langle a | \Psi(t) \rangle |^2 = e^{(\lambda_a + \lambda_a^+)t} = e^{-\gamma a t}$$

ce qui montre que le système se désintègre avec une vie moyenne $1/\gamma a$

Si l'état initial est un état lié quelconque $|\Psi(0)\rangle = \sum_a C_a |a\rangle$ au temps t , la composante de $|\Psi(t)\rangle$ suivant l'état lié $|\alpha\rangle$ sera :

$$\langle \alpha | \Psi(t) \rangle = \sum_a C_a e^{\lambda_{\alpha a} t} \langle \alpha | a \rangle \quad (10)$$

La probabilité de désintégration au temps t sera donnée par :

$$P(t) = -\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha} \langle \Psi(t) | \alpha \rangle \langle \alpha | \Psi(t) \rangle$$

Or en tenant compte de (9) on a :

$$i \frac{\partial}{\partial t} \langle \alpha | \Psi(t) \rangle = \langle \alpha | \mathcal{H}_1 + W | \beta \rangle \langle \beta | \Psi(t) \rangle$$

d'où :

$$P(t) = \sum_{\alpha\beta} \langle \Psi(t) | \alpha \rangle \langle \alpha | i (\mathcal{H}_1 + W - \mathcal{H}_1^+ - W^+) | \beta \rangle \langle \beta | \Psi(t) \rangle$$

Soit d'après (6) :

$$P(t) = \sum_{\alpha\beta} \langle \Psi(t) | \alpha \rangle \Gamma_{\alpha\beta} \langle \beta | \Psi(t) \rangle \quad (11)$$

Cette formule donne le nombre de désintégrations par unité de temps, au temps t pour un état $|\Psi(t)\rangle$ donné.

Les états de désintégrations

Les formules 10 et 11 nous permettent de connaître à tout instant la probabilité de désintégration pour un état initial donné. La forme de la matrice Γ donnée par 7 nous suggère que la probabilité de désintégration vers un type particulier de désintégration T sera donnée par une formule analogue à 11 dans laquelle la matrice Γ sera remplacée par la seule contribution apportée par le type T. L'objet de ce paragraphe sera de le démontrer.

de désintégration

La composante de $|\Psi(t)\rangle$ suivant l'état $|k\rangle$ est donnée par :

$$\langle k | \Psi(t) \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{-izt} \langle k | \frac{1}{z-H} | \Psi(0) \rangle dz$$

($|\Psi(0)\rangle$ est toujours un état lié, combinaison linéaire des $|\alpha\rangle$)

En appliquant l'identité (2) on a :

$$\langle k | \frac{1}{z-H} | \Psi(0) \rangle = \langle k | \frac{1}{z-H_1} | n \rangle H_{n\alpha}^W \langle \alpha | \frac{1}{z-H} | \Psi(0) \rangle$$

En appliquant de nouveau (2) à $H_1 = H_0 + (H_1 - H_0)$, qui n'a d'éléments de matrice qu'entre états liés ou entre états de désintégration

$$\begin{aligned} \langle k | \frac{1}{z-H_1} | n \rangle &= \delta_{kn} \frac{1}{z-E_k} + \frac{1}{z-E_k} H_{kn}^W \frac{1}{z-E_n} \\ &+ \frac{1}{z-E_k} H_{km}^W \frac{1}{z-E_m} H_{mn}^W \frac{1}{z-E_n} + \dots \end{aligned}$$

Soit en ne gardant que les termes du 1er ordre en H^W

$$\langle k | \frac{1}{z-H} | \Psi(0) \rangle = \frac{1}{z-E_k} H_{k\alpha}^W \langle \alpha | \frac{1}{z-H} | \Psi(0) \rangle \quad (12)$$

Au deuxième membre de (12) nous voyons maintenant apparaître un élément de matrice, entre états liés, de la résolvante que nous avons calculée précédemment.

Nous voulons connaître la probabilité d'apparition d'événements au temps t suivant le type T . Cette probabilité est donnée par :

$$P_T(t) = \frac{\partial}{\partial t} \sum_k \langle \Psi(t) | k \rangle \langle k | \Psi(t) \rangle =$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi^2} \int_C \int_{\bar{C}} e^{-i(z-z')t} \sum_k \langle \Psi(0) | \frac{1}{z'-H} | k \rangle \langle k | \frac{1}{z-H} | \Psi(0) \rangle dz dz'$$

La somme sur k est étendue à tous les états du type T .

C et $\bar{C}$ étant tels que l'on passe du bon côté de l'origine (c'est-à-dire que l'on doit prendre : $z = x_1 + i\epsilon_1$ $z' = x_2 - i\epsilon_2$)

$$P_T(t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_C \int_{\bar{C}} e^{i(z'-z)t} \langle \Psi(0) | \frac{1}{z'-H} | \alpha \rangle \Gamma_{\alpha\beta}^T(z, z') \langle \beta | \frac{1}{z-H} | \Psi(0) \rangle dz dz'$$

$$\text{avec : } \Gamma_{\alpha\beta}^T(z, z') = i \sum_k \frac{(z' - z) H_{\alpha k}^W H_{k\beta}^W}{(z' - E_k)(z - E_k)} \quad (13)$$

Nous allons faire une approximation du même type que pour $\mathcal{W}(z)$, c'est-à-dire que nous allons remplacer $\Gamma_{\alpha\beta}^T(z, z')$ par sa valeur pour $z = E_0 + i\epsilon_1$ $z' = E_0 - i\epsilon_2$

$$\text{Soit : } \Gamma_{\alpha\beta}^T = \lim_{\substack{0 < \epsilon_1 \rightarrow 0 \\ 0 < \epsilon_2 \rightarrow 0}} i \sum_k \frac{(E_0 - i\epsilon_2 - E_0 - i\epsilon_1) H_{\alpha k}^W H_{k\beta}^W}{(E_0 - i\epsilon_2 - E_k)(E_0 + i\epsilon_1 - E_k)}$$

ou en introduisant la densité d'état final $\rho_T(E)$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^T = \lim_{\substack{\epsilon_1 \rightarrow 0 \\ \epsilon_2 \rightarrow 0}} \int \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2) H_{\alpha T}^W(E) H_{T\beta}^W(E) \rho_T(E) dE}{(E_0 - E)^2 + \epsilon_1 \epsilon_2 + i(\epsilon_1 - \epsilon_2)(E_0 - E)}$$

Si nous posons $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^T = \lim_{0 < \epsilon \rightarrow 0} \int \frac{2\epsilon H_{\alpha T}^W(E) H_{T\beta}^W(E) \rho_T(E) dE}{(E - E_0)^2 + \epsilon^2} = 2\pi H_{\alpha T}^W(E_0) H_{T\beta}^W(E_0) \rho_T(E_0) \quad (14)$$

Nous pouvons maintenant réécrire

$$P_T(t) = \frac{1}{4\pi^2} \iint e^{i(z' - z)t} \langle \Psi(0) | \frac{1}{z' - H} | \alpha \rangle \Gamma_{\alpha\beta}^T \langle \beta | \frac{1}{z - H} | \Psi(0) \rangle$$

soit :

$$P_T(t) = \langle \Psi(t) | \alpha \rangle \Gamma_{\alpha\beta}^T \langle \beta | \Psi(t) \rangle$$

Remarques

I -

$$a) \text{ On a } \Gamma_{\alpha\beta} = \sum_T \Gamma_{\alpha\beta}^T \text{ donc } P(t) = \sum_T P_T(t)$$

la probabilité de désintégration au temps t est bien égale à la somme des probabilités suivant tous les modes comme cela doit être.

b) La forme (Eq. 7) de la matrice Γ , ainsi que l'herméticité de l'hamiltonien des interactions faibles H^W entraîne que la matrice Γ est hermitique définie positive (de même que Γ^T pour les mêmes raisons) donc $\gamma_a = \langle a | \Gamma | a \rangle > 0$ et on a effectivement une décroissance exponentielle.

II -

Nous voudrions maintenant revenir sur la remarque préliminaire du début. Ici $\mathcal{W}_{\alpha\beta}(z)$ ne peut avoir de limite pour $z \rightarrow E_0 + i\varepsilon$ que si les états de désintégration forment aussi une suite continue. Ces deux remarques nous permettent de comprendre alors l'idée directrice de la méthode utilisée : elle consiste à remplacer une suite infinie de singularités pour la résolvante $\mathcal{G}(z)$ situées sur l'axe réel par un nombre fini de singularités qui ont, elles, une partie imaginaire permettant de rendre compte de la désintégration des états liés.

Le fait que l'on soit obligé de faire intervenir une suite infinie d'états d'énergies voisines pour rendre compte de la désintégration d'une particule, est d'ailleurs à rapprocher de la relation d'Heisenberg liant la dispersion en énergie et la dispersion en temps.

III -

a) Nous avons seulement calculé $P_T(t)$ qui est la dérivée par rapport au temps de la probabilité pour le système d'être dans un état de type T, en effet le calcul de cette probabilité elle-même conduit à une intégrale divergente : En effet au lieu d'avoir à calculer (Eq. 13 et 14)

$$\limite_{z'z \rightarrow E_0} i \sum_k \frac{(z-z') H_{\alpha k}^W H_{k\beta}^W}{(z' - E_k)(z - E_k)} \quad (14)$$

On aurait à calculer :

$$\limite_{z'z \rightarrow E_0} i \sum_k \frac{H_{\alpha k}^W H_{k\beta}^W}{(z' - E_k)(z - E_k)}$$

$$\text{Soit : } \int \frac{H_{\alpha T}^W(E) H_{T\beta}^W(E) \rho(t) dE}{(E - E_0)^2} \quad \text{qui diverge}$$

b) En pratique le calcul de $\Delta_{\alpha\beta}$ conduit aussi à une intégrale divergente.

Ces divergences sont caractéristiques de la théorie des champs et en pratique on ne sait pas calculer $\Delta_{\alpha\beta}$.

B - RESUME ET APPLICATION AU SYSTEME $K^0 \bar{K}^0$

Nous allons maintenant rassembler les résultats obtenus et les appliquer à l'étude du système $K^0 \bar{K}^0$.

Dans la suite de cet exposé, nous appellerons $|\Psi(t)\rangle$, non pas le vecteur état du système défini en A, mais sa projection sur l'espace des états liés $|\alpha\rangle$ ici $|K^0\rangle$ et $|\bar{K}^0\rangle$, ce sera un vecteur de l'espace à deux dimensions de base $|K^0\rangle$ et $|\bar{K}^0\rangle$. $|\Psi\rangle(t)$ obéit à l'équation :

$$-\frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = W |\Psi(t)\rangle \quad \text{avec} \quad W = \frac{\Gamma}{2} + iM \quad (15)$$

Γ et M sont deux matrices hermétiques 2×2 . Si on prend pour base $|K^0\rangle$ et $|\bar{K}^0\rangle$, Γ s'écrit d'après la définition que nous avons donnée au chapitre I des amplitudes.

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \sum_T \Gamma_{\alpha\beta}^T \quad \text{avec} \quad \Gamma_{\alpha\beta}^T = \mathcal{H}^*(K_\alpha \rightarrow T) \mathcal{H}(K_\beta \rightarrow T) \quad (16) \quad *$$

$$M_{\alpha\beta} = E_0 \delta_{\alpha\beta} + \Delta_{\alpha\beta}$$

α et β se réfèrent aux états K^0 ou $\bar{K}^0$

* - La présence du facteur $\sqrt{2\pi\rho}$ dans (I_1) a pour conséquence d'obtenir une forme simple pour Γ .

Il y a deux états à décroissance exponentielle que nous noterons $|K_S^0\rangle$ et $|K_L^0\rangle$, ils s'obtiennent en diagonalisant la matrice W :

$$W |K_S\rangle = \lambda_S |K_S\rangle \quad \text{avec} \quad \lambda_S = \frac{\gamma_S}{2} + im_S$$

$$W |K_L\rangle = \lambda_L |K_L\rangle \quad \lambda_L = \frac{\gamma_L}{2} + im_L$$

Les vies moyennes sont $\tau_S = \frac{1}{\gamma_S}$ et $\tau_L = \frac{1}{\gamma_L}$ et les masses m_S et m_L .

La probabilité de désintégration est :

$$N(t) = - \frac{d \langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle}{dt} = \langle \Psi(t) | \Gamma | \Psi(t) \rangle$$

et la probabilité de désintégration vers un type T :

$$N^T(t) = \langle \Psi(t) | \Gamma^T | \Psi(t) \rangle \quad (17)$$

du fait de la forme particulière de Γ^T (Eq. 16) nous allons définir un espace des amplitudes, dual de l'espace des états K^0 $\bar{K}^0$ et un bra-amplitude défini par :

$$\langle \mathcal{A}(t) | K^0 \rangle = \mathcal{A}(K^0 \rightarrow T)$$

$$\langle \mathcal{A}(t) | \bar{K}^0 \rangle = \mathcal{A}(\bar{K}^0 \rightarrow T)$$

on peut alors définir des amplitudes de désintégration pour un état quelconque et en particulier on écrira :

$$\mathcal{A}(K_S \rightarrow T) = \langle \mathcal{A}(t) | K_S \rangle \quad (18)$$

$$\mathcal{A}(K_L \rightarrow T) = \langle \mathcal{A}(t) | K_L \rangle \quad (19)$$

avec cette définition (16) peut s'écrire également :

$$\Gamma^T = | \mathcal{A}(t) \rangle \langle \mathcal{A}(t) | \quad (20)$$

et (17) :

$$N^T(t) = | \langle \mathcal{A}(t) | \Psi(t) \rangle |^2 \quad (21)$$

Dans la suite nous utiliserons indifféremment, soit les expressions (16) et (17), soit (20) et (21), suivant la commodité des calculs.

Conséquences du théorème CPT.

Reprenons l'équation :

$$\mathcal{W}_{\alpha\beta} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_T \frac{H_{\alpha T}^W(E) H_{T\beta}^W(E) \rho_T(E) dE}{E_0 - E + i\varepsilon} \quad (5)$$

La relation (I₂) que l'on peut écrire $H_{\alpha T}^W = H_{T\alpha}^W$ montre que

$$\mathcal{W}_{\alpha\beta} = \mathcal{W}_{\beta\alpha}$$

Soit en particulier :

$$W_{K^0 K^0} = W_{\overline{K}^0 \overline{K}^0}$$

ou

$$\Gamma_{K^0 K^0} = \Gamma_{\overline{K}^0 \overline{K}^0} \quad \text{et} \quad M_{K^0 K^0} = M_{\overline{K}^0 \overline{K}^0}$$

Conséquences de l'invariance CP

Les éléments de matrice de H sont alors réels donc Γ_T et M sont des matrices réelles. De plus CP commute avec l'hamiltonien.

En prenant pour base les états propres simultanés de H^S et de CP (H^S commute toujours avec CP, car les interactions fortes conservent séparément C et P) on a :

$$\langle K_\alpha^0 | H^W | n \rangle = \langle K_\alpha^0 | (CP)^+ CP H^W (CP)^+ CP | n \rangle = (-1)^{1+\alpha+p} \langle K_\alpha^0 | H^W | n \rangle$$

Soit : $H_{\alpha T}^W(E) = (-1)^{1+\alpha+p} H_{\alpha T}^W(E)$

ou α se réfère à K_1^0 ou K_2^0 et $p^{(T)}$ est la valeur de CP pour l'état n.

On a alors : $\mathcal{W}_{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha+\beta} \mathcal{W}_{\alpha\beta}$

ce qui prouve que W est diagonal dans cette représentation :

$|K_S\rangle$ et $|K_L\rangle$ sont alors identiques à $|K_1^0\rangle$ et $|K_2^0\rangle$.

Les amplitudes et les matrices de désintégration dans les différents systèmes.

Nous avons écrit dans le tableau I les diverses amplitudes de désintégrations de K^0 et $\bar{K}^0$ que nous avons définies et calculées dans le chapitre I. Pour les désintégrations en 2π , le terme F est dû aux interactions de deux pions dans l'état final. Ces interactions introduisent des déphasages ne dépendant que des nombres quantiques de l'état final : il y a deux déphasages $e^{i\delta_0}$ et $e^{i\delta_2}$ *. Les termes $F_{I,l}$ des désintégrations en 3π ont la même origine.

Pour les modes leptoniques, il n'y a pas lieu d'ajouter de tels facteurs, puisque les particules finales n'ont pas entre elles d'interactions fortes.

Le tableau II représente les amplitudes de désintégrations pour les états K_1^0 et K_2^0 . Les tableaux III et IV donnent les matrices de masses et de désintégrations.

* - Pour faire apparaître seulement le terme $e^{i(\delta_2 - \delta_0)}$, il est nécessaire de modifier notre convention sur la phase A_0 en y incluant la phase $e^{i\delta_0}$.

Calcul des états K_S et K_L

La diagonalisation de W s'obtient en posant

$$W_{00} = p^2 \quad W_{00} = q^2 \quad (\text{Réf. 24})$$

On a alors :

$$\lambda_S = W_{00} + pq = \frac{1}{2} \Gamma_{00} + i M_{00} + pq = \frac{\gamma_S}{2} + i m_S$$

$$\lambda_L = W_{00} - pq = \frac{1}{2} \Gamma_{00} + i M_{00} - pq = \frac{\gamma_L}{2} + i m_L$$

$$|K_S\rangle = \frac{p |K^0\rangle + q |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{|p|^2 + |q|^2}} \quad |K_L\rangle = \frac{p |K^0\rangle - q |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{|p|^2 + |q|^2}}$$

et inversement :

$$|K^0\rangle = \frac{\sqrt{|p|^2 + |q|^2}}{2p} |K_S\rangle + |K_L\rangle$$

$$|\bar{K}^0\rangle = \frac{\sqrt{|p|^2 + |q|^2}}{2q} |K_S\rangle - |K_L\rangle$$

Ces deux états ne sont pas forcément orthogaux et on a :

$$\alpha = \langle K_L | K_S \rangle = \frac{|p|^2 - |q|^2}{|p|^2 + |q|^2}$$

Pour un état initial $|\Psi(0)\rangle = C_S |K_S\rangle + C_L |K_L\rangle$

avec $|C_S|^2 + |C_L|^2 + 2\alpha \text{Re } C_S C_L^* = 1$

l'état au temps t est : $|\Psi(t)\rangle = C_S e^{-\lambda_S t} |K_S\rangle + C_L e^{-\lambda_L t} |K_L\rangle$

La probabilité de désintégrations par unité de temps vers un mode T est donnée par la formule :

$$\begin{aligned}
 N_T(t) = & |C_S|^2 |a_{ST}|^2 e^{-t/\tau_S} + |C_L|^2 |a_{LT}|^2 e^{-t/\tau_L} \\
 & + 2e^{-\frac{t}{2}(1/\tau_S + 1/\tau_L)} \left\{ \operatorname{Re} (C_S C_L^* a_{ST} a_{LT}^*) \cos \Delta m t \right. \\
 & \left. + \operatorname{Im} (C_S C_L^* a_{ST} a_{LT}^*) \sin \Delta m t \right\}
 \end{aligned} \tag{22}$$

$\Delta m = m_S - m_L$ est la différence de masse entre K_S et K_L

a_{ST} et a_{LT} sont les amplitudes des désintégrations $K_S^0 \rightarrow T$ et $K_L^0 \rightarrow T$ des équations (18) et (19).

La formule (22) se démontre facilement à partir des équations (16) et (17) utilisées dans le système $K_S K_L$ ou dans le système $K^0 \bar{K}^0$ ou mieux à partir de la formule (21).

Nous voyons que la probabilité de désintégration en fonction du temps pour un mode quelconque se présente sous la forme d'une somme de deux exponentielles, l'une due au K_S^0 à courte vie moyenne, l'autre au K_L^0 à longue vie moyenne, et de termes exponentiels oscillants avec une phase qui dépend de l'état initial comme des amplitudes de désintégration.

C'est cette équation qui conditionnera pratiquement toutes les expériences à faire sur le système $K^0 \bar{K}^0$.

Taux de désintégrations

$\gamma_S = 1/\tau_S$ et $\gamma_L = 1/\tau_L$ sont les taux de désintégrations totaux nous pouvons définir également des taux de désintégrations partiels pour

un mode, soit :

$$\gamma_S^T = |a_{ST}|^2 = | \langle \mathcal{H}(t) | K_S \rangle |^2$$

$$\gamma_L^T = |a_{LT}|^2 = | \langle \mathcal{H}(t) | K_L \rangle |^2$$

Ce sont les coefficients des exponentielles dans (22) et on a les relations :

$$\gamma_S = \sum_T \gamma_S^T \quad \gamma_L = \sum_T \gamma_L^T$$

Expression des états K_S K_L à partir des états K_1^0 K_2^0

L'expérience (Réfs. 2 et 14) montrant que les effets de la violation de CP sont faibles, il est tentant d'exprimer les états $|K_S\rangle$ et $|K_L\rangle$ en fonction des états de désintégrations $|K_1^0\rangle$ et $|K_2^0\rangle$ et de même pour les amplitudes de désintégration et les éléments de matrice de Γ et de M .

$$\text{Posons donc} \quad \epsilon = \frac{p - q}{p + q} = \frac{p^2 - q^2}{(p + q)^2} \quad *$$

si ϵ est petit $p^2 \sim q^2 \sim pq$

$$\epsilon \sim \frac{p^2 - q^2}{4pq} = \frac{\frac{1}{2}(\Gamma_{00} - \Gamma_{\bar{0}0}) + i(M_{00} - M_{\bar{0}0})}{\gamma_S - \gamma_L + 2i \Delta m}$$

* - Cette définition est celle employée en Réf. 2. Il en existe d'autres comme

$$\epsilon = \frac{p - q}{2p} \quad \text{ou} \quad \xi = \frac{p - q}{p}$$

ce qui fait que les formules que l'on trouve dans la littérature peuvent présenter des facteurs numériques différents des nôtres. Il en est d'ailleurs de même de la définition de la matrice Γ qui est parfois définie à l'aide de l'équation $W = \Gamma + iM$ au lieu de $\frac{\Gamma}{2} + iM$ comme nous l'avons fait.

d'après le tableau III

$$\varepsilon \simeq \frac{\frac{1}{2} (A_2^2 - A_2^{2*} + i y 3\pi + i y_\ell - 2mi)}{1/\tau_S - 1/\tau_L + 2i \Delta m} \quad (23)$$

Les états s'écrivent alors :

$$|K_S\rangle = \frac{|K_1^0\rangle + \varepsilon |K_2^0\rangle}{\sqrt{1 + |\varepsilon|^2}} \quad |K_L\rangle = \frac{|K_2^0\rangle + \varepsilon |K_1^0\rangle}{\sqrt{1 + |\varepsilon|^2}} \quad * \quad (24)$$

$$|K_1^0\rangle = \frac{\sqrt{1 + |\varepsilon|^2}}{1 - \varepsilon^2} (|K_S\rangle - \varepsilon |K_S\rangle)$$

$$|K_2^0\rangle = \frac{\sqrt{1 + |\varepsilon|^2}}{1 - \varepsilon^2} (|K_L\rangle - \varepsilon |K_S\rangle)$$

Les amplitudes de désintégrations sont (voir Tableau II et Equations 18 et 19)

$$a_{ST} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\varepsilon|^2}} (a_{1T} + \varepsilon a_{2T}) \quad a_{LT} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\varepsilon|^2}} (a_{2T} + \varepsilon a_{1T})$$

et les éléments de matrice de désintégrations (voir Tableau IV)

$$\Gamma_{SS} = \frac{1}{1 + |\varepsilon|^2} (\Gamma_{11} + |\varepsilon|^2 \Gamma_{22} + 2R_e \varepsilon \Gamma_{21})$$

$$\Gamma_{LL} = \frac{1}{1 + |\varepsilon|^2} (\Gamma_{22} + |\varepsilon|^2 \Gamma_{11} + 2R_e \varepsilon \Gamma_{21})$$

$$\Gamma_{SL} = \frac{1}{1 + |\varepsilon|^2} (\Gamma_{12} + |\varepsilon|^2 \Gamma_{21} + \varepsilon \Gamma_{22} + \varepsilon^* \Gamma_{11})$$

* - En réalité, d'après nos définitions de $|K_S\rangle$ et $|K_L\rangle$

$$|K_S\rangle = \frac{p}{|p|} \frac{|1+\varepsilon|}{1+\varepsilon} \frac{K_1^0 + \varepsilon K_2^0}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}} \quad |K_L\rangle = \frac{p}{|p|} \frac{|1+\varepsilon|}{1+\varepsilon} \frac{K_1^0 + \varepsilon K_2^0}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}}$$

mais les phases des états étant arbitraires, on a négligé le premier facteur.

$|\epsilon|$ étant très petit (de l'ordre de 10^{-3} comme nous le verrons) on pourra dans la formule (22) remplacer a_{ST} par a_{1T} sauf si $a_{1T} \simeq 0$ et a_{LT} par a_{2T} sauf si $a_{2T} \simeq 0$ en commettant une erreur très faible.

Remarques sur ϵ

Nous voulons voir ici quelle limite supérieure les données expérimentales permettant d'assigner à ϵ .

Les équations permettent d'écrire :

$$\langle K_S | W + W^+ | K_L \rangle = (\lambda_L + \lambda_S^*) \langle K_S | K_L \rangle$$

soit $\alpha (\lambda_L + \lambda_S^*) = \langle K_S | \Gamma | K_L \rangle$

ou $\alpha (\lambda_L + \lambda_S^*) = \sum_T a_{ST}^* a_{LT}$ (25)

L'inégalité de Schwartz appliquée à cette équation donne :

$$\alpha |\lambda_L + \lambda_S^*| \leq \left[\sum_T |a_{ST}|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_T |a_{LT}|^2 \right]^{1/2}$$

$$\alpha \left| \frac{\gamma_S + \gamma_L}{2} + i \Delta m \right| \leq \left[\sum_T \gamma_S^T \right]^{1/2} \left[\sum_T \gamma_L^T \right]^{1/2}$$

soit $\alpha \leq \sqrt{\frac{\gamma_S \gamma_L}{\left(\frac{\gamma_S + \gamma_L}{2}\right)^2 + \Delta m^2}}$

Les valeurs expérimentales sont $\Delta m \sim \frac{\gamma_S}{2}$ $\gamma_S \simeq 1,155 \times 10^{10}/\text{sec}$ $\gamma_L \sim 2 \cdot 10^7/\text{sec}$

On trouve donc $\alpha \leq 6\%$ soit $R_e \epsilon \leq 3\%$

L'équation (25) permet encore de trouver une limite supérieure à α , en utilisant les taux partiels cette fois ci :

$$\alpha \left| \lambda_L + \lambda_S^* \right| \leq \sum_T \left| a_{ST} \right| \left| a_{LT} \right| = \sum_T \sqrt{\gamma_S^T \gamma_L^T}$$

$$\text{d'où : } \alpha \leq \frac{\sum_T \sqrt{\gamma_S^T \gamma_L^T}}{\sqrt{\left(\frac{\gamma_S + \gamma_L}{2} \right)^2 + \Delta m^2}}$$

Cette inégalité doit fournir un résultat plus précis car les modes de désintégrations de K_S et de K_L sont pour la plupart différents. L'inconvénient est que l'on ne connaît pas tous les taux de désintégration du K_L et du K_S .

Bell et Steinberger (Réf. 25) avec des hypothèses vraisemblables, ont conclu que $\alpha < 1\%$.

C - EXPERIENCES POSSIBLES

Maintenant que nous avons un schéma théorique de la désintégration nous devons le comparer à la réalité expérimentale pour voir s'il est en accord avec celle-ci et pour mesurer les grandeurs théoriques (amplitudes avec leurs phases, vies moyennes et différence de masses) que nous avons introduites.

Pour ce faire nous allons donc observer en fonction du temps les désintégrations suivant les différents modes. Il apparaît sur l'équation (22)

que les lois de désintégrations dépendent des conditions initiales; nous devons maintenant nous intéresser au mécanisme de production de nos K^0 .

Les K^0 sont toujours produits par interactions fortes et les conditions expérimentales diffèrent suivant la nature des particules incidentes utilisées.

En général on ne connaîtra pas l'étrangeté du K initial, car la plupart des faisceaux de particules (p , $\bar{p}$, π etc...) produisent à la fois des K^0 et des $\bar{K}^0$. Cependant, il se peut que la cinématique à la production et l'identification des autres particules produites (Λ Σ K^+ K^-) permettent de connaître l'étrangeté. Par exemple la réaction $\pi^- p \rightarrow \Lambda^0 K^0$ peut être utilisée pour produire des K^0 . Une autre méthode pour produire des K^0 est de partir d'un faisceau de K^+ (suffisamment peu énergétique pour ne pas avoir de création de paires de particules étranges) et d'utiliser la réaction d'échange de charge $K^+ + n \rightarrow K^0 + p$: c'est cette méthode qui a été utilisée dans ce travail.

Tout ceci montre que les conditions expérimentales peuvent être très diverses. On peut cependant souligner qu'il est plus facile (sauf avec des anti-protons) de produire des K^0 que des $\bar{K}^0$ du fait des lois de conservations de l'étrangeté et de ce que tous les hypérons ont une étrangeté négative.

Pour rendre compte de la désintégration, introduisons donc ρ la probabilité que l'on ait affaire à un K^0 , $1-\rho$ à un $\bar{K}^0$: ρ mesure la composition (incohérente) du faisceau initial et dépend du rapport entre les sections efficaces de production de K^0 et de $\bar{K}^0$.

La loi de désintégration pour un mode T s'obtient en utilisant l'équation (22) pour un K^0 , puis pour un $\bar{K}^0$ et en combinant les intensités

obtenues dans les rapports ρ et $1-\rho$: on obtient en ne gardant que les termes du premier ordre en α :

$$N_T(t) = \left[\frac{1}{2} - \alpha (\rho - 1/2) \right] \left[a_{ST}^2 e^{-t/\tau_S} + a_{LT}^2 e^{-t/\tau_L} \right] \\ + 2 \left[\rho - 1/2 - \alpha/2 \right] \left[\operatorname{Re} a_{ST} a_{LT}^* \cos \Delta mt \right. \\ \left. + \operatorname{Im} a_{ST} a_{LT}^* \sin \Delta mt \right] e^{-t/2 (1/\tau_S + 1/\tau_L)}$$

Cette expression nous permet de définir trois types principaux de méthodes d'études expérimentales.

1) On se place très loin de la source produisant des K; le seul terme important est alors le terme en $|a_{LT}|^2 e^{-t/\tau_L}$: on mesure alors le taux de désintégration $K_L \rightarrow T$, ce qui est normal puisque l'on a dans ces conditions un faisceau pur de K_L .

2) On se place à une distance intermédiaire de la source de manière à pouvoir observer les phénomènes d'interférence dus aux termes en $\sin \Delta mt$ et $\cos \Delta mt$. Il faut remarquer ici que la non connaissance de l'étrangeté c'est-à-dire $\rho = 1/2$ supprime pratiquement ces termes et est donc une perte importante d'information. On devra donc toujours prendre un faisceau de K^0 (ou de $\bar{K}^0$). On voit alors intuitivement et on peut démontrer que les conditions optimales d'observation des interférences sont réalisées lorsque :

$$|a_{ST}|^2 e^{-t/\tau_S} \simeq |a_{LT}|^2 e^{-t/\tau_L}$$

3) On peut enfin se placer près de la source; si $|a_{ST}|^2 \gg |a_{LT}|^2$, on mesurera le taux de désintégration $K_S \rightarrow T$.

D - DESINTEGRATION EN PRESENCE DE MATIERE - REGENERATION

Nous avons jusqu'ici considéré que nos K^0 se propageaient dans le vide. La présence de matière doit cependant modifier légèrement notre schéma : En effet, les mésons K^0 et $\bar{K}^0$ sont susceptibles d'avoir des interactions fortes avec la matière, scattering ou réactions nucléaires. Ceci va perturber leur manière de se désintégrer, donnant lieu, comme nous allons le voir, au phénomène dit de régénération.

Pour tenir compte de ces interactions, nous devons remplacer l'équation (15) par l'équation suivante :

$$- \frac{d}{dt} | \Psi \rangle = W^v | \Psi(t) \rangle$$

$$\text{avec } W^v = W + \begin{pmatrix} \mathcal{W}_I & 0 \\ 0 & \overline{\mathcal{W}}_I \end{pmatrix}$$

dans le système de base $K^0 \bar{K}^0$

Les éléments non diagonaux de la matrice ci-dessus sont nuls car ils n'existe pas de réaction nucléaire $K \rightarrow \bar{K}$ ou $\bar{K} \rightarrow K$ qui ne conserve pas l'étrangeté. $\mathcal{W}_I$ et $\overline{\mathcal{W}}_I$ sont liés aux amplitudes f et $\bar{f}$ de diffusion vers l'avant du K^0 et du $\bar{K}^0$ sur nucléon, par les formules :

$$\mathcal{W}_I = \frac{2\pi N}{i M_K} \quad \overline{\mathcal{W}}_I = \frac{2\pi N}{i M_K} \quad \bar{f}(0) \quad (26)$$

ou N est le nombre de nucléon par unité de volume et M_K la masse du K^0 (une justification de ces formules sera donnée plus loin).

Pour trouver les lois d'évolution du système, nous raisonnons comme précédemment : il existe deux états à décroissance exponentielles

pures $|K_S^I\rangle$ et $|K_L^I\rangle$ qui sont les vecteurs propres de W^I avec les valeurs propres λ_S^I et λ_L^I . La diagonalisation de W^I se fait facilement en se plaçant dans le système $|K_L\rangle, |K_S\rangle$, on a :

$$W^I |K_S\rangle = \left(\lambda_S + \frac{w_I + \bar{w}_I}{2}\right) |K_S\rangle + \frac{w_I - \bar{w}_I}{2} |K_L\rangle$$

$$W^I |K_L\rangle = \left(\lambda_L + \frac{w_I + \bar{w}_I}{2}\right) |K_L\rangle + \frac{w_I - \bar{w}_I}{2} |K_S\rangle$$

En posant :

$$\epsilon_I = \frac{\lambda_S - \lambda_L}{w_I - \bar{w}_I} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{w_I - \bar{w}_I}{\lambda_S - \lambda_L}\right)^2} - 1 \right] \quad (27)$$

On obtient :

$$\lambda_S^I = \lambda_S + \frac{w_I + \bar{w}_I}{2} + \frac{w_I - \bar{w}_I}{2} \epsilon_I \quad (28)$$

$$\lambda_L^I = \lambda_L + \frac{w_I + \bar{w}_I}{2} - \frac{w_I - \bar{w}_I}{2} \epsilon_I$$

$$|K_S^I\rangle = |K_S\rangle + \epsilon_I |K_L\rangle, \quad |K_L^I\rangle = |K_L\rangle - \epsilon_I |K_S\rangle \quad (29) \quad *$$

$$|K_S\rangle = \frac{K_S^I - \epsilon_I K_L^I}{1 + \epsilon_I^2}, \quad |K_L\rangle = \frac{|K_L^I\rangle + \epsilon_I |K_S^I\rangle}{1 + \epsilon_I^2}$$

* - Les $|K_S^I\rangle$ et $|K_L^I\rangle$ définis ici ne sont pas de norme 1 pour la commodité de l'écriture.

Les équations 27, 28, 29 permettent de résoudre tous les problèmes concernant la désintégration du système.

Expérimentalement, le moment des K est toujours suffisamment grand pour que $\frac{W_I - \overline{W}_I}{\lambda_S - \lambda_L}$ soit petit.

$$(27) \text{ devient alors : } \epsilon_I \sim \frac{W_I - \overline{W}_I}{2 (\lambda_S - \lambda_L)} \ll 1 \quad (30)$$

et on peut négliger le dernier terme de 28 : la différence de masse apparaissant dans les termes oscillants de la désintégration (cf Eq. 22) n'est pas changée et tous les termes exponentiels sont multipliés par un facteur $e^{-\text{Re}(W_I + \overline{W}_I)t}$ qui rend compte de l'absorption du faisceau par la matière.

L'application du théorème optique permet de transformer (26):

$$R_e (W_I + \overline{W}_I) = \frac{2\pi N}{M_K} \quad \text{Im} \{ f(o) + \overline{f}(o) \} = N \frac{p}{M_K} \frac{\sigma + \overline{\sigma}}{2}$$

σ et $\overline{\sigma}$ étant les sections efficaces totales sur nucléon de K et de $\overline{K}$. Le terme d'absorption s'écrit donc :

$$e^{-(W_I + \overline{W}_I)t} = e^{-\frac{\ell}{L}} \quad \text{avec} \quad \ell = \frac{p}{M_K} t$$

$$\text{ou} \quad \frac{1}{L} = N \frac{\sigma + \overline{\sigma}}{2}$$

* - A titre d'exemple, les longueurs d'interactions des K^0 et des $\overline{K}^0$ dans notre expérience (mélange propane fréon) sont voisines de 1 mètre. Le moment des K^0 ($\sim 500 \text{ MeV}/c$) est tel que la longueur de désintégration du K_S $\lambda_S = \frac{p}{M} \tau_S$ est voisine de 3cm donc $\epsilon_I \simeq 0,03$.

C'est la longueur moyenne d'interaction des K^0 et des $\overline{K}^0$. K_S et K_L ayant une probabilité 1/2 d'être un K^0 ou $\overline{K}^0$ vis-à-vis des interactions nucléaires. Ceci justifie à posteriori les équations 26.

Cas particulier, faisceau de K_L pur.

Nous allons voir comment un tel faisceau, après passage à travers une certaine quantité de matière, peut présenter une composante $|K_S\rangle$: c'est le phénomène de régénération assez analogue au phénomène de l'apparition d'une composante $\overline{K}^0$ dans un faisceau de K^0 par désintégration.

Supposons que l'état au temps $t = 0$ soit $|\Psi(0)\rangle = |K_L\rangle$ d'après les équations 28, 29 au temps t , on aura :

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{e^{-\lambda_L^I t} + \epsilon_I^2 e^{-\lambda_S^I t}}{1 + \epsilon_I^2} |K_L\rangle + \frac{\epsilon_I \left(e^{-\lambda_S^I t} - e^{-\lambda_L^I t} \right)}{1 + \epsilon_I^2} |K_S\rangle$$

Le rapport des amplitudes K_S et K_L au temps t sera, en tenant compte de l'approximation (30) :

$$\frac{K_S}{K_L} = \frac{\mathcal{W}_I - \overline{\mathcal{W}}_I}{1/\tau_S - 1/\tau_L + 2i \Delta m} \left(1 - e^{-(1/\tau_S - 1/\tau_L + i \Delta m) t} \right)$$

Ceci montre que si nous considérons un faisceau pur de K_L (obtenu donc en se plaçant loin de la source et dans le vide), et si nous le faisons traverser la matière, la composante $\overline{K}^0$, qui a pour le K_L une amplitude bien définie par rapport à celle de K^0 , sera plus vite absorbée et de plus déphasée,

ce qui fait que après une certaine quantité de matière traversée l'état obtenu n'est plus K_L pur, mais un mélange de K_L et de K_S (d'où l'emploi du terme, régénérateur). Le point important est que ce mélange $K^0, \bar{K}^0$ soit ici cohérent puisque l'on est parti d'un état K_L , mélange lui-même cohérent de $K^0, \bar{K}^0$; on peut donc utiliser l'équation (22), la traversée du régénérateur ayant eu seulement pour conséquence de modifier en phase et en amplitude relatives, les coefficients C_S et C_L d'une manière que l'on peut calculer si on connaît bien les interactions des K^0 avec la matière. On peut en particulier utiliser ce phénomène pour se mettre dans la condition d'observation optimum des interférences. On peut même théoriquement, par un choix judicieux du régénérateur, choisir les phases de C_S et C_L , de telle sorte que la probabilité de désintégration s'annule en un point, ou on peut la rendre au contraire maximum.

Remarques :

Nous avons vu qu'il est très intéressant d'utiliser des faisceaux purs de $K^0, \bar{K}^0, K_L$. Il serait aussi très intéressant d'avoir des faisceaux purs de K_S (par exemple pour mesurer ses taux de désintégration dans les modes interdits), mais il semble très difficile d'en préparer.

Une méthode pourrait être de s'adresser aux annihilations des anti-protons en état $K^0 \bar{K}^0$ anti-symétrique, à la désintégration on obtient alors des états $K_S K_L$ également anti-symétrique et l'étude des désintégrations simultanées permettrait d'obtenir des renseignements précieux pour certains modes (3π par exemple), mais cette étude nécessiterait un très grand nombre d'annihilations d'anti-protons et semble, en l'état actuel de la technique, impossible.

E - CONCLUSION

Nous avons dans ce chapitre exposé, d'abord la théorie du système K^0 , $\overline{K}^0$, lorsque l'on ne fait que l'hypothèse CPT conservé. Nous avons ensuite montré quels étaient les types d'expériences possibles à faire. Nous voudrions maintenant souligner quels sont les buts de ces expériences.

En fait l'expérience de Christenson et al montre que l'un ou plusieurs des termes de l'équation (23) n'est pas nul. En vue de comprendre cette violation de CP, il est important de savoir quels sont les termes qui ne sont pas nuls. Nous allons donc exposer dans le chapitre suivant, quels renseignements sur ce sujet peuvent être fournis par les différents modes de désintégrations.

CHAPITRE IV : CONSEQUENCES EXPERIMENTALES DE LA VIOLATION CP

A - DESINTEGRATIONS EN DEUX PIONS

Si CP est conservé $a_2 \rightarrow 2\pi = 0$ et $a_1 \rightarrow 2\pi = 0$, nous allons donc poser (voir chapitre III, p.46)

$$a_S \rightarrow 2\pi \quad \bar{a}_1 \rightarrow 2\pi$$

$$a_L \rightarrow 2\pi = a_2 \rightarrow 2\pi + \epsilon a_1 \rightarrow 2\pi$$

$$\text{Soit : } \eta_{+-} = \frac{a_L \rightarrow \pi^+ \pi^-}{a_S \rightarrow \pi^+ \pi^-} \quad \text{et} \quad \eta_{00} = \frac{a_L \rightarrow \pi^0 \pi^0}{a_S \rightarrow \pi^0 \pi^0}$$

Les rapports de branchement sont :

$$\frac{\Gamma_{+-}^L}{\Gamma_{+-}^S} = |\eta_{+-}|^2 \quad \frac{\Gamma_{00}^L}{\Gamma_{00}^S} = |\eta_{00}|^2$$

Au premier ordre en ϵ et en $\frac{A_2}{A_0}$ d'après le tableau II on a :

$$\eta_{+-} = \epsilon + i \frac{F}{\sqrt{2}} \operatorname{Im} \frac{A_2}{A_0} \quad \eta_{00} = \epsilon - i \sqrt{2} F \operatorname{Im} \frac{A_2}{A_0} \quad (1)$$

Le rapport de branchement $\frac{K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-}{K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-}$ montre que ϵ est de l'ordre de grandeur de 10^{-3} ce qui justifie les approximations faites.

Nous avons de plus actuellement à notre disposition les résultats suivants :

$$\text{Taux } K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \quad \Gamma_{+0} = 1,74 \pm 0,05 \quad 10^7/\text{sec.}$$

$$\text{Taux } K_S^0 \rightarrow \text{tous les modes} \quad \gamma^S = 1,55 \pm 0,019 \quad 10^{10}/\text{sec.} \quad (\text{Réf. 26})$$

$$\text{Rapport de branchement } \frac{K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-}{K_S^0 \rightarrow \text{tous les modes}} \quad \frac{\Gamma_{+-}^S}{\gamma^S} = 30,9 \pm 2,2 \quad 10^{-2}$$

$$\text{Désintégration } K_L^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \quad | \eta_{+-} | = 1,98 \pm 0,06 \quad 10^{-3} \quad (\text{Réf. 27})$$

$$\text{phase } \eta_{+-} = 34^\circ \pm 13 \quad (\text{Réf. 28})$$

$$\text{Désintégration } K_L^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \quad | \eta_{00} | = 4,9 \pm 0,5 \quad 10^{-3} \quad (\text{Réf. 29})$$

$$\text{Signe de différence de masse } \Delta m = M_S - M_L < 0 \quad (\text{Réf. 30})$$

- La vie moyenne de K_S^0 $\tau_S = 1/\gamma_S$ est mesurée en regardant le nombre de désintégration en fonction du temps suivant le mode $\pi^+ \pi^-$ (c'est la méthode 3 du chapitre III). Il n'est même pas nécessaire de bien séparer ce mode des désintégrations en trois corps, car celles-ci sont beaucoup plus rares.

- $| \eta_{+-} |$ et $| \eta_{00} |$ sont mesurés par la méthode 1 du chapitre III.

- La phase de η_{+-} est mesurée en observant les interférences entre les désintégrations de $K_L^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ et celles de $K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$, une petite composante K_S^0 étant créée à partir du faisceau principal de K_L^0 par régénération.

Une telle expérience permet de plus de mesurer avec une grande précision la valeur de la différence de masse $|\Delta m|$.

- Le signe de la différence de masse est déterminé en étudiant les désintégrations suivant le mode $\pi^+\pi^-$ d'un faisceau de K_S^0 auquel est superposé un faisceau de K_S^0 produit par un régénérateur. En faisant varier la position du régénérateur on peut mesurer la différence de masse avec son signe. Il est toutefois nécessaire de faire des hypothèses (modèle optique) sur la phase de l'amplitude de régénération .

Les taux de désintégration $K \rightarrow \pi\pi$ ne dépendent que des amplitudes A_0 et A_2 , nous pouvons écrire deux relations les liant :

$$\frac{2\Gamma_{+0}/R_{+0}}{\Gamma_{+-}^S/R_{+-} + \Gamma_{00}^S/R_{00}} \sim \left| \frac{A_2}{A_0} \right|^2$$

$$\frac{\Gamma_{+-}^S/R_{+-} - 2\Gamma_{00}^S/R_{00}}{\Gamma_{+-}^S/R_{+-} + \Gamma_{00}^S/R_{00}} \sim 2\sqrt{2} R_e \frac{A_2}{A_0} \cos(\delta_2 - \delta_0)$$

Les facteurs R_{+0} , R_{00} , R_{+-} étant des facteurs correctifs d'espace de phases dus aux différences de masses entre les particules suivant les différents modes :

$$R_{+-} = \sqrt{1 - \frac{4m_{\pi^+}^2}{m_{K^0}^2}} \quad R_{00} = \sqrt{1 - \frac{4m_{\pi^0}^2}{m_{K^0}^2}}$$

$$R_{+0} = \sqrt{\left[1 - \frac{(m_{\pi^0} + m_{\pi^+})^2}{m_{K^+}^2}\right] \left[1 - \frac{(m_{\pi^+} - m_{\pi^0})^2}{m_{K^0}^2}\right]}$$

Nous devons de plus tenir compte des corrections électromagnétiques (Réf. 31), finalement le résultat obtenu est :

$$R_e \frac{A_2}{A_0} \cos (\delta_2 - \delta_0) = (1,8 \pm 0,8) 10^{-2} \quad \left| \frac{A_2}{A_0} \right| = (4,5 \pm 0,04) 10^{-2} \quad (2)$$

Ces deux valeurs sont parfaitement compatibles, mais ne nous donnent guère de renseignements sur $\text{Im} \frac{A_2}{A_0}$, si ce n'est que $(\text{Im} \frac{A_L}{A_0}) < 4,5\%$.

Les valeurs expérimentales de $|\eta_{+-}|$ et $|\eta_{00}|$ vont par contre nous fournir un résultat beaucoup plus précis.

En effet on peut déduire de (1) :

$$\text{Im} \frac{A_2}{A_0} = \frac{\eta_{+-} - \eta_{00}}{3} \frac{\sqrt{2}}{iF} \quad \epsilon = \frac{\eta_{00}}{3} + \frac{2\eta_{+-}}{3}$$

D'où les limites expérimentales suivantes :

$$3 \cdot 10^{-4} < |\epsilon| < 2,8 \cdot 10^{-3} \quad (3)$$

$$1,3 \cdot 10^{-3} < \left| \text{Im} \frac{A_2}{A_0} \right| < 3,2 \cdot 10^{-3} \quad (4)$$

Les limites assignées à $\text{Im} \frac{A_2}{A_0}$ montrent que $\frac{A_2}{A_0}$ est presque réel. En ce cas les équations 2 permettent de calculer le déphasage (cf. Réf. 31) on trouve :

$$\left| R_e \frac{A_2}{A_0} \right| = 4,4 \cdot 10^{-2} \quad (5)$$

$$|\delta_2 - \delta_0| = 66^\circ \pm 13^\circ \text{ à } \pi \text{ près} \quad (6)$$

B - REPRESENTATION GRAPHIQUE

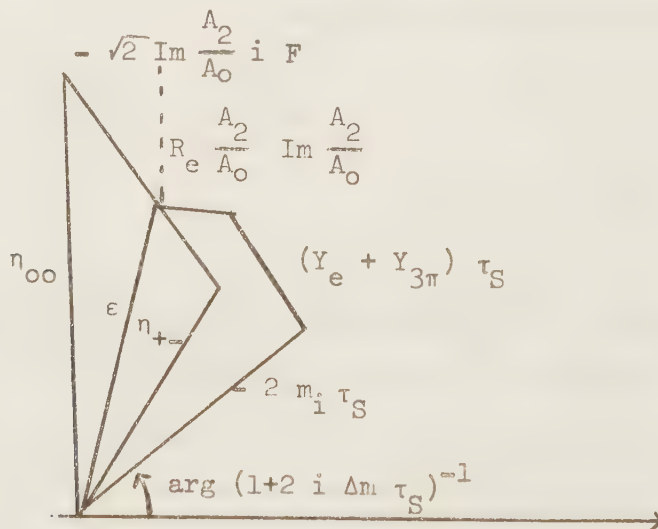
Nous allons maintenant exposer une représentation graphique habituellement utilisée pour analyser les différents paramètres en jeu :

Rappelons tout d'abord les formules importantes que nous avons trouvées :

$$\eta_{+-} = \epsilon + i \frac{F}{\sqrt{2}} \operatorname{Im} \frac{A_2}{A_0} \quad \eta_{00} = \epsilon - i \sqrt{2} F \operatorname{Im} \frac{A_2}{A_0} \quad (1)$$

$$\epsilon = \frac{-2m_i \tau_S + i (Y_e + Y_{3\pi}) \tau_S - i 2R_e \frac{A_2}{A_0} \operatorname{Im} \frac{A_2}{A_0}}{1 + 2 i \Delta m \tau_S} \quad (7)$$

Représentons dans le plan complexe η_{+-} , η_{00} , ϵ par des vecteurs. ϵ en particulier est la somme des contributions, représentées également par des vecteurs, dues à m_i , $Y_e + Y_{3\pi}$ et $\operatorname{Im} \frac{A_2}{A_0}$



Suivant l'importance relative des divers vecteurs de cette figure nous verrons qu'il y a plusieurs manières différentes d'interpréter la violation de CP constatée.

Montrons maintenant que les résultats que nous avons cités plus haut permettent de construire cette figure.

Nous construisons d'abord le vecteur représentatif de η_{+-} dont nous connaissons la phase et l'amplitude; de l'extrémité de ce vecteur, menons deux droites faisant un angle $\pm 66^\circ$ avec l'axe imaginaire, ces droites sont alors coupées en quatre points par un cercle centré à l'origine et de rayon $|\eta_{00}|$.

Pour chaque solution le reste de la construction s'effectue facilement; il y a encore une petite ambiguïté du fait que nous ne connaissons pas le signe de $R_e \frac{A_2}{A_0}$ mais il se trouve que le terme $R_e \frac{A_2}{A_0} \operatorname{Im} \frac{A_2}{A_0}$ est toujours négligeable devant les autres termes quelque soit la phase de η_{+-} les équations 3 et 5 permettent d'écrire :

$$5,710^{-5} < \left| R_e \frac{A_2}{A_0} \operatorname{Im} \frac{A_2}{A_0} \right| < 1,410^{-4}$$

Le tableau suivant montre les résultats fournis par les quatre solutions :

	$10^3 \varepsilon $	$10^3 (Y_e + Y_{3\pi}) \delta_S$	$10^3 m_i \delta_S$	$10^3 \operatorname{Im} \frac{A_2}{A_0}$	$\delta_2 - \delta_0$
1	0,52	+ 0,43	+ 0,05	+ 3	- 66°
2	1,68	+ 1,78	- 0,75	- 2,54	+ 66°
3	2,68	- 0,77	- 1,73	- 1,33	- 66°
4	2,60	- 1,55	- 1,45	+ 1,67	+ 66°

Les solutions 1 et 3 sont favorisées par le fait que les déphasages doivent être tels que $\delta_0 > \delta_2$ (Réf. 31).

* - On peut aussi ajouter 180° à $\delta_2 - \delta_0$ et changer le signe de $\operatorname{Im} \frac{A_2}{A_0}$

Remarque

Il reste encore à mettre des erreurs sur ce genre de résultat, ce que nous n'avons pas fait ici; de plus pour obtenir la phase de η_{+-} et la valeur de $\delta_2 - \delta_0$ on est obligé de faire certaines hypothèses semi-théoriques sur la régénération ou sur les corrections électromagnétiques et il est assez difficile de savoir quelle confiance on doit accorder à ces deux résultats.

C - DESINTEGRATIONS EN TROIS PIONS

Si CP est conservé, comme nous l'avons dit les désintégrations $K_1^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^0$ et $\pi^+ \pi^- \pi^0$ (en négligeant les états à moments angulaires non nuls) sont interdites.

La situation est l'inverse de celle du $\pi^+ \pi^-$ pour lequel ce sont les désintégrations $K_2^0 \rightarrow 2\pi$ qui sont interdites. La violation de CP pourra se traduire par des désintégrations du type $K_S^0 \rightarrow 3\pi$ mais expérimentalement ceci sera très difficile à mettre en évidence puisque l'on ne sait pas construire actuellement un faisceau pur de K_S^0 .

Si CP est conservé, on a donc $a_{2 \rightarrow 3\pi} \neq 0$ et $a_{1 \rightarrow 3\pi} = 0$.
Nous allons donc poser :

$$a_{L \rightarrow 3\pi} = \bar{\epsilon} a_{2 \rightarrow 3\pi} \text{ et } a_{S \rightarrow 3\pi} = a_{1 \rightarrow 3\pi} + \epsilon a_{2 \rightarrow 3\pi} \quad (8)$$

d'où :

$$\eta_{3\pi} = \frac{a_{S \rightarrow 3\pi}}{a_{L \rightarrow 3\pi}} = \epsilon + \frac{a_{1 \rightarrow 3\pi}}{a_{2 \rightarrow 3\pi}} \quad (9)$$

C'est la partie $\frac{a_1 \rightarrow 3\pi}{a_2 \rightarrow 3\pi}$ qui teste la violation de CP dans le canal particulier.

En effet $Y_{3\pi} = \text{Im} \langle K^0 | \Gamma_{3\pi} | \bar{K}^0 \rangle = \text{Im} a_2 a_1$

Soit $Y_{3\pi} = \Gamma_{3\pi}^L \text{Im} \frac{a_1 \rightarrow 3\pi}{a_2 \rightarrow 3\pi}$

Partant d'un K^0 au temps $t = 0$, la loi de désintégration en fonction du temps sera donnée par :

$$N_{3\pi}(t) = |a_2 \rightarrow 3\pi|^2 \left[|\eta|^2 \frac{2}{3\pi} e^{-t/\tau_S} + e^{-t/\tau_L} + 2e^{-\frac{t}{2}(1/\tau_S + 1/\tau_L)} (R_e \eta_{3\pi} \cos \Delta m t + \text{Im} \eta_{3\pi} \sin \Delta m t) \right] \quad (10)$$

Cette expression devant s'entendre, soit pour des états avec I et ℓ déterminés, soit plus naturellement pour les états de désintégration $\pi^+\pi^-\pi^0$ et $3\pi^0$, auquel cas on doit, pour calculer $a_1 \rightarrow 3\pi$ et $a_2 \rightarrow 3\pi$, combiner les amplitudes (de différents I et ℓ) données par le tableau II.

Comme nous l'avons dit, l'étude en fonction du temps de cette expression peut se révéler expérimentalement difficile, nous allons donc essayer de restreindre le nombre de paramètre mis en jeu en supposant certaines règles de sélection :

1) Si CP n'est pas violé par ces désintégrations $A_{I,\ell} = A_{I,\ell}^*$, $\eta = \varepsilon$ et l'expression (10) ne fait que refléter la violation générale de CP dans les K^0 . Pratiquement seul le terme e^{-t/τ_L} est important et l'information que l'on peut retirer est le taux de désintégration

$$\Gamma(K_L \rightarrow 3\pi) \propto |a_2 \rightarrow 3\pi|^2$$

2) Si on suppose que l'état final est un état $I = 1$ symétrique. Il n'y a plus qu'un seul déphasage $F_{1,0}$ dû aux interactions fortes et on peut écrire :

$$\left(\frac{a_1 \rightarrow 3\pi}{a_2 \rightarrow 3\pi} \right)_{I=1} = \frac{a_1 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0}{a_2 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0} = \frac{a_1 \rightarrow 3\pi^0}{a_2 \rightarrow 3\pi^0} = \frac{A_{1,0} - A_{2,0}^*}{A_{1,0} + A_{2,0}^*} = \text{itg } \phi$$

$$\text{et : } \left| \frac{a_2 \rightarrow 3\pi^0}{a_2 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0} \right|^2 = 3/2$$

En réalité on doit intégrer les amplitudes des divers états finals et on obtient des corrections d'espace de phases qui donnent :

$$\frac{\Gamma_{2 \rightarrow 3\pi^0}}{\Gamma_{2 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0}} = 1.83 \quad (11) \quad *$$

En négligeant ϵ dans (9), (10) devient :

$$N_{\pi^+ \pi^- \pi^0}(t) = \Gamma_{2 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0} \left[e^{-t/\tau_L} + \text{tg}^2 \phi e^{-t/\tau_S} + 2e^{-(1/\tau_S + 1/\tau_L)} \text{tg } \phi \sin \Delta mt \right] \quad (12)$$

et de même pour $N_{3\pi^0}(t)$

Remarque

Si on ne fait pas l'hypothèse $I = 1$ symétrique, la formule (12) contiendra un paramètre supplémentaire et un terme en $\cos \Delta mt$.

* - Un exposé plus complet de cette question est donné référence 32.

3) En réalité $A_{1,0}$ est lui-même la somme de deux amplitudes avec $\Delta I = 1/2$ et $\Delta I = 3/2$. Si on suppose la règle $\Delta I = 1/2$ vraie, on obtient des relations avec les taux de désintégration du K^+ en trois π .
En effet, on a alors :

$$| a_{2 \rightarrow 3\pi} | \propto | A_{1,0} + A_{1,0}^* | = 2 | A_{1,0} | \cos \phi$$

$$\text{et} \quad | a_{+ \rightarrow 3\pi} | \propto | A_{1,0} |$$

Les termes de proportionnalité dépendent de coefficient de Clebsh Gordan et de calculs d'intégrales de phase (cf Réf. 32). Tous calculs faits, on obtient les relations supplémentaires.

$$\frac{\Gamma_{2 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0}}{\Gamma_{K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \pi^0}} = 1.97 \cos^2 \phi \quad (13)$$

$$\frac{\Gamma_{K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \pi^0}}{\Gamma_{K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^-}} = 0.31 \quad (14) *$$

Soit pour les distributions en fonction du temps

$$N_{\pi^+ \pi^- \pi^0}(t) = 1.97 \Gamma_{K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0} (\cos^2 \phi e^{-t/\tau_L} + \sin^2 \phi e^{-t/\tau_S} - \frac{t}{2} (1/\tau_S + 1/\tau_L) \sin \Delta m t) + 2 \sin \phi \cos \phi e^{-t/\tau_S} \sin \Delta m t \quad (15)$$

$$N_{3\pi^0}(t) = 3.5 \Gamma_{K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \pi^0} (-----)$$

Remarque

Pour CP conservé, on a $\phi = 0$ et $\frac{\Gamma_{2 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0}}{\Gamma_{+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \pi^0}} = 1.97$

* - Cette dernière relation est l'équivalente pour le K^+ de la relation pour le K^0 et ne nécessite que l'hypothèse état final $I = 1$ symétrique.

Toute déviation du rapport expérimental par rapport à cette valeur théorique peut s'interpréter, soit comme une violation de la règle $\Delta I = 1/2$ et on peut calculer alors $\text{Re} \frac{\text{amplitude } 3/2}{\text{amplitude } 1/2}$ qui mesure cette violation; soit comme une violation de CP, et on peut alors calculer ϕ qui mesure cette violation, seul l'examen de la distribution en fonction du temps des désintégrations peut permettre (par 15) de décider entre ces deux interprétations.

D - DESINTEGRATIONS LEPTONIQUES

I - Probabilité de désintégration

Pour ces modes d'après le tableau II, on voit qu'aucune des amplitudes de désintégration de K_1^0 ou K_2^0 vers $\pi^+ e^- \bar{\nu}$ ou $\pi^- e^+ \nu$ n'est nulle, de sorte que l'on peut pratiquement les confondre avec les amplitudes de désintégration du K_S et du K_L . Les matrices de désintégration sont alors celles du tableau IV.

$$\text{posons : } \alpha = \frac{2\text{Re } f^* g}{|f|^2 + |g|^2} \quad \beta = \frac{2\text{Im } f^* g}{|f|^2 + |g|^2} \quad \gamma = \frac{|f|^2 - |g|^2}{|f|^2 + |g|^2}$$

$$\text{avec : } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (17)$$

$$\text{d'où : } \Gamma_{\ell^+} = \frac{|f|^2 + |g|^2}{2} \quad \begin{pmatrix} 1 + \alpha & \gamma + i\beta \\ \gamma - i\beta & 1 - \alpha \end{pmatrix} \quad \text{dans le système}$$

$$\Gamma_{\ell^-} = \frac{|f|^2 + |g|^2}{2} \quad \begin{pmatrix} 1 + \alpha & -\alpha + i\beta \\ -\gamma - i\beta & 1 - \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} K_1^0 & K_2^0 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

La loi de désintégration en fonction du temps, pour un K^0 produit à $t = 0$, est :

$$N^{\pm}(t) = \frac{|f|^2 + |g|^2}{4} \left[(1 + \alpha) e^{-t/\tau_S} + (1 - \alpha) e^{-t/\tau_L} + 2 e^{-\frac{t}{2} (1/\tau_S + 1/\tau_L)} (\beta \sin \Delta m t \pm \gamma \cos \Delta m t) \right] \quad (18)$$

Nous pouvons également donner les définitions suivantes :

$$\Gamma_{\ell}^S = (|f|^2 + |g|^2) (1 + \alpha) \quad \text{taux absolu de désintégration du } K_S \rightarrow \pi^{\pm} \ell^{\mp} \nu$$

$$\Gamma_{\ell}^L = (|f|^2 + |g|^2) (1 - \alpha) \quad \text{taux absolu de désintégration du } K_L \rightarrow \pi^{\pm} \ell^{\mp} \nu$$

$$Y_{\ell} = (|f|^2 + |g|^2) \beta \quad \text{c'est le terme qui définit la contribution des modes leptoniques à } \epsilon \text{ (Eq. III, 23)}$$

du fait de l'équation (17)

$$Y_{\ell}^2 \leq \Gamma_{\ell}^S \Gamma_{\ell}^L \quad (19)$$

L'étude expérimentale sur ces modes consistera à déterminer les 4 paramètres dont dépend l'équation (18).

II - Règles de sélections

Si nous revenons maintenant aux diverses règles de sélections, nous avons les implications suivantes :

- CP conservé entraîne $\beta = 0$ ou $Y_{\ell} = 0$, il n'y a pas de terme en $\sin \Delta m t$.

- $\Delta S = \Delta Q$ entraîne $\alpha = \beta = 0$ $\gamma = 1$ ou $Y_{\ell} = 0$ et $\Gamma_{\ell}^S = \Gamma_{\ell}^L$
la violation de CP ne peut alors provenir des modes leptoniques.

- $\Delta I = 1/2$ entraîne que les termes $a_{3/2 \ 3/2}$ et $a_{3/2 \ 1/2}$ sont nuls, on a alors $\alpha = \beta = 0$ $\gamma = 1$. On a de plus une relation entre les taux de désintégrations du K^0 et celui du K^+ :

$$\Gamma_{\ell}^S = \Gamma_{\ell}^L = 2 \Gamma_{\ell}^+ \quad (20)$$

Tout ceci montre que si l'on veut expliquer l'expérience de Christenson par une violation de CP dans les modes leptoniques, comme proposé par certains auteurs (Réf. 33). Il est nécessaire de plus que les règles $\Delta S = \Delta Q$ et $\Delta I = 1/2$ soient violées aussi. En fait la condition imposée sur Y_{ℓ} (Eq. 3) permet de voir, connaissant Γ_{ℓ}^S et Γ_{ℓ}^L que Y_{ℓ} peut difficilement être responsable seul de la valeur trouvée pour $|\eta_{+-}|$. Cependant si il s'avèrait que Y_{ℓ} était important, cela permettrait de penser que le terme m_1 de la matrice de masse pourrait être lui aussi important. En effet il interviendrait alors dans le calcul de la matrice de masse des processus virtuels de la forme $K^0 \rightarrow \pi l \bar{\nu} \rightarrow \bar{K}^0$ violant $\Delta S = \Delta Q$ et CP.

L'importance d'un tel problème fait que nous devons maintenant regarder la structure même des amplitudes f et g qui sont des fonctions de la cinématique de la désintégration et de la nature du lepton.

III - Élément de matrice - Facteur de Forme

La théorie des interactions faibles (Réf. 34) conduit à écrire l'hamiltonien de la désintégration sous la forme du produit d'un courant hadronique et d'un courant leptonique :

$$H = \langle \pi | J_{\alpha} | K \rangle \langle \ell | L_{\alpha} | \nu \rangle$$

L'expérience (Réf. 35) a montré que l'interaction était du type $V - A$, c'est-à-dire que J_α est la somme d'un vecteur et d'un pseudo-vecteur. En fait les seules variables hadroniques dont on peut disposer, sont les deux quadri-vecteurs impulsion-énergie du K et du π (ce que nous noterons P_K et P_π) et on ne peut avec ces deux quadri-vecteurs construire de pseudo-quadri-vecteurs et J_α s'écrit :

$$\langle J_\alpha \rangle = f_+ (q^2) (P_K + P_\pi)_\mu + f_- (q^2) (P_K - P_\pi)_\mu$$

où $q^2 = (P_K - P_\pi)^2 = M_K^2 + M_\pi^2 - 2 \vec{P}_K \vec{P}_\pi$ est le seul scalaire non trivial que l'on peut former avec K et π .

L'élément de matrice de la désintégration s'écrit alors :

$$M = \left\{ f_+ (P_K + P_\pi) + f_- (P_K - P_\pi) \right\} \bar{u}_\nu \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u_\ell$$

Utilisant les relations de conservation de l'impulsion-énergie

$$P_K - P_\pi = P_\nu + P_\ell$$

et l'équation de Dirac pour les leptons :

$$\bar{u}_\mu \gamma_\mu (1 + \gamma_5) (P_\nu)_\mu = 0$$

et

$$(P_\ell)_\mu \gamma_\mu u_\ell = m_\ell u_\ell$$

ainsi que les propriétés des matrices γ : $\gamma_\mu \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma_\mu$

Il vient :

$$M = \bar{u}_\nu \left[f_+ (P_K + P_\pi) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) + f_- m_\ell (1 - \gamma_5) \right] u_\ell \quad (21)$$

Les facteurs de forme f_+ et f_- sont déterminés par les interactions fortes auxquelles sont soumis le K et le π . D'après ce que l'on sait de ces interactions fortes, on a de bonnes raisons de penser que f_+ et f_- sont du même ordre de grandeur.

D'autre part, il faut noter que d'après le principe d'universalité des interactions de l'électron et du mu (Réf. 36), les facteurs de forme f_+ et f_- sont les mêmes pour les désintégrations

$$K \rightarrow \pi e \nu \quad \text{et} \quad K \rightarrow \pi \mu \nu$$

Si maintenant nous faisons un retour sur les règles de sélections CP conservé $\Delta S = \Delta Q$ $\Delta I = 1/2$, nous voyons qu'il nous faut distinguer dans les facteurs de forme f_+ et f_- des contributions $\Delta S = \Delta Q$ et des contributions $\Delta S = -\Delta Q$ et de même vis-à-vis du formalisme du spin isotopique des contributions $(3/2, 3/2)$, $(3/2, 1/2)$ et $(1/2, 1/2)$.

Cas de désintégrations électroniques

Nous pouvons en ce cas négliger la masse de l'électron dans l'équation (31); il n'y a donc pour ce mode qu'un seul facteur de forme intervenant.

Les expériences que l'on peut faire sur le mode de désintégration électronique permettent donc de connaître la structure de f_+ et de vérifier les règles de sélection CP conservé, $\Delta S = \Delta Q$ et $\Delta I = 1/2$ pour cette partie de l'interaction, mais ne permet pas de connaître la structure de f_- .

En particulier même si l'expérience montrait que $Y_\beta = 0$, c'est-à-dire pas de violation de CP dans les modes électroniques, on ne pourrait en déduire que $Y_\mu = 0$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas non plus de violation dans les modes muoniques.

IV - Désintégrations leptoniques en présence de matière

A titre d'exemple, nous allons dans ce paragraphe donner la loi de désintégration en fonction du temps qui doit être utilisée dans la matière à la place de l'équation (18).

Les formules III (29) et II (24) permettent de passer des états $|K_S^I\rangle$, $|K_L^I\rangle$ aux états $|K_S\rangle$, $|K_L\rangle$ puis aux états $|K_1^0\rangle$, $|K_2^0\rangle$.

Si on part à $t = 0$ d'un $|K^0\rangle$ l'état au temps t est donné par :

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\lambda_S^I t} \left[(1 - \rho_-) |K_1^0\rangle + \rho_+ |K_2^0\rangle \right] \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\lambda_L^I t} \left[(1 - \rho_+) |K_2^0\rangle + \rho_- |K_1^0\rangle \right]$$

$$\text{ou} \quad \rho_+ = \frac{(1 + \epsilon_i)(\epsilon + \epsilon_I)}{(1 + \epsilon)(1 + \epsilon_I^2)} \quad \rho_- = \frac{(1 - \epsilon_I)(\epsilon - \epsilon_I)}{(1 + \epsilon)(1 + \epsilon_I^2)}$$

Si nous négligeons ϵ devant ϵ_I^* et ne conservons que les termes du 1er ordre en ϵ_I :

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\lambda_S^I t} \left[(1 + \epsilon_I) |K_1^0\rangle + \epsilon_I |K_2^0\rangle \right] \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\lambda_L^I t} \left[(1 - \epsilon_I) |K_2^0\rangle - \epsilon_I |K_1^0\rangle \right]$$

* - Nous avons vu que $\epsilon_I \sim 0,03$ et $\epsilon \sim 0,002$

et à la place de la formule (18) :

$$\begin{aligned}
 N^{\pm}(t) = & \frac{|f|^2 + |g|^2}{2} e^{-\frac{t}{L}} \left\{ \left[(1+\alpha)(1+2R_e \epsilon_I) + 2(\pm \gamma R_e \epsilon_I - \beta \text{Im } \epsilon_I) \right] e^{-t/\tau_S} \right. \\
 & + \left[(1-\alpha)(1-2R_e \epsilon_I) - 2(\pm \gamma R_e \epsilon_I - \beta \text{Im } \epsilon_I) \right] e^{-t/\tau_L} \\
 & + 2 e^{-\frac{t}{2}(1/\tau_S + 1/\tau_L)} \left[(\pm \gamma + 2\beta \text{Im } \epsilon_I - 2\alpha R_e \epsilon_I) \cos \Delta m t \right. \\
 & \left. \left. + (\beta - 2(1 \pm \gamma) \text{Im } \epsilon_I) \sin \Delta m t \right] \right\} \quad (22)
 \end{aligned}$$

ϵ_I est relié par III (26) et III (30) à $f(0) - \bar{f}(0)$ dont nous pouvons connaître la partie imaginaire par le théorème optique comme nous l'avons dit au (chapitre III p.). De récentes expériences ayant montré que la phase $f(0) - \bar{f}(0)$ est très voisine de 90° (Réf. 37), nous pouvons faire l'hypothèse que $R_e(f(0) - \bar{f}(0)) \simeq 0$. On obtient alors :

$$\epsilon_I = \frac{P \tau_S}{M_K} \quad N \frac{\sigma - \bar{\sigma}}{\sqrt{2}} \quad \frac{1+i}{2} = a \frac{1+i}{2}$$

En prenant $\Delta m = -\frac{1}{2\tau_S}$ ce qui est très proche des dernières valeurs admises (Réf. 38).

Sous ces hypothèses (22) devient :

$$\begin{aligned}
 N^{\pm}(t) = & \frac{|f|^2 + |g|^2}{2} e^{-\frac{t}{L}} \left\{ \left[1 + \alpha + a(1 + \alpha \pm \gamma - \beta) \right] e^{-t/\tau_S} \right. \\
 & + \left[1 - \alpha - a(1 - \alpha \pm \gamma + \beta) \right] e^{-t/\tau_L} \\
 & + 2 e^{-\frac{t}{2}(1/\tau_S + 1/\tau_L)} \left[(\pm \gamma - a(\alpha - \beta)) \cos \Delta m t + (\beta + a(1 \pm \gamma)) \sin \Delta m t \right] \left. \right\} \quad (23)
 \end{aligned}$$

C'est cette formule que nous avons utilisée dans toute la suite.

E - ORIGINES POSSIBLES DE LA VIOLATION DE CP.

Suivant une analyse phénoménologique due à Wolfenstein (Réf. 39) on peut envisager les types d'explications suivantes :

- 1 A - La violation de CP a lieu dans les interactions fortes (terme H^S de l'hamiltonien) et donc avec $\Delta I = 0$. Une telle violation est indépendante de la règle $\Delta I = 1/2$.
- 1 B - La violation de CP a aussi lieu dans les interactions fortes ou électromagnétiques et est caractérisée par une violation de l'indépendance de charge. Une possibilité est que cette violation soit un caractère des interactions électromagnétiques (Réf. 31).
- 2 A et 2 B - La violation de CP a lieu dans les interactions non leptoniques $\Delta S = 1$.
- 2 C - Il existe une amplitude $\Delta S = -\Delta Q$ violant CP.
- 3 C - Il existe une interaction super faible avec $\Delta S = 2$ violant CP

Le fait que l'on trouve $|\eta_{00}| \neq |\eta_{+-}|$ montre que les hypothèses 1 A et 3 sont à rejeter. Notre expérience doit permettre de tester l'hypothèse 2 C par l'étude des désintégrations leptoniques et les hypothèses 2 A et 2 B par l'étude des désintégrations en trois pions. Nous discuterons nos résultats à la fin de la deuxième partie; soulignons simplement dès maintenant qu'ils excluent la possibilité qu'un de ces types de violation de CP puisse entraîner un effet de l'ordre de grandeur de celui observé dans les désintégrations en deux pions.

11ème PARTIE : ETUDE EXPERIMENTALE DES MODES DE DESINTEGRATION DES K^0 .

INTRODUCTION

Après avoir vu quels étaient les aspects théoriques de la désintégration des K^0 . Nous allons maintenant envisager comment dans notre expérience il a été possible d'étudier les différents modes de désintégration pour en extraire des mesures des divers paramètres mis en jeu par la théorie.

Dans l'analyse d'une telle expérience on peut en général distinguer plusieurs phases. Un premier travail consiste à extraire de la masse d'informations à notre disposition, un certain nombre de caractères spécifiques auquel nous nous intéressons. Ici nous chercherons à extraire des photographies prises, celles montrant des types bien déterminés de désintégration des K^0 . Cette phase de l'étude comportera la définition de critères de sélection : quels caractères tel événement d'une photographie doit posséder pour être qualifié de candidat possible d'une désintégration $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ ou $\pi^+ \pi^- \pi^0$ ou $\pi e \nu$ etc....

Il se trouve que certains événements d'un type tout différent peuvent posséder les mêmes caractères (K^+ régénéré, paire de Dalitz par exemple) : ce sont des événements de bruit de fond. Nous devons chercher d'une part à les éliminer; principalement par une étude cinématique survenant après une mesure de chaque événement, et par l'adoption de coupures rejetant préférentiellement les événement de bruit de fond et purifiant ainsi le lot de vrais événements. D'autre part nous devons chercher à évaluer dans le lot final d'événements l'importance numérique ainsi que l'influence que pourront avoir sur les résultats désirés de tels bruit de fond. L'étude cinématique que nous ferons devra également nous fournir les divers paramètres dont nous aurons besoin (temps de vie par exemple) pour la comparaison avec la théorie.

Avant de faire cette comparaison un autre travail consiste à examiner quelles déformations les conditions expérimentales (instruments de mesures, définition adoptée pour un bon événement) apporteront aux lois théoriques plus ou moins fixées que nous voulons tester.

Enfin le dernier travail à faire consistera à comparer les prédictions de ces lois déformées avec le lot d'événements obtenu et à en tirer des mesures des divers paramètres mis en jeu.

La plupart de ces travaux ayant déjà fait l'objet de publication notre but n'est pas d'en faire un exposé complet mais plutôt d'insister sur certains points de l'analyse qui nous ont paru plus intéressants; nous examinerons en particulier surtout les points ayant spécialement trait au problème de la violation de CP.

Le plan de cette rédaction sera donc le suivant :

Dans un premier chapitre nous rappellerons brièvement quel était le dispositif expérimental employé ainsi que les divers problèmes d'analyse posés par chaque type de désintégration.

Dans les trois chapitres suivants, sur l'exemple/^{particulier}des désintégrations $K_S^0 \rightarrow \pi^- e \nu$, nous exposerons les problèmes posés par la mesure et l'étude cinématique puis nous exposerons la méthode du maximum de vraisemblance qui nous a permis de faire la comparaison souhaitée entre la théorie et l'expérience; à cette occasion nous verrons comment introduire dans cette méthode les déformations dues aux conditions expérimentales; le calcul de ces déformations fera l'objet du quatrième chapitre.

Les résultats trouvés seront exposés dans le cinquième et dernier chapitre.

CHAPITRE I : DISPOSITIF EXPERIMENTAL

GENERALITES

Le détecteur utilisé était la chambre à bulles à liquide lourd de l'Ecole Polytechnique (BP3) au CERN. Des mésons K^+ étaient produits par le faisceau de protons du CERN heurtant une cible interne. Un système de transport du faisceau secondaire définissait un moment de 800 MeV/c pour les K^+ , les séparait des autres types de particules (π^+ , p...) et les amenait dans la chambre à liquide lourd.

Sur les photos prises on observe le faisceau de K^+ . Certains K^+ interagissent avec les noyaux du liquide donnant, par échange de charge, un K^0 dont on observe la désintégration, et éventuellement des protons d'évaporation.

Nous donnons ci-dessous un résumé des principales conditions expérimentales; deux lots de photographies, avec des conditions expérimentales un peu différentes, ont été utilisés.

Composition du liquide	55% C_3H_8 , 45% CF_3Br	(1er Lot)
en volume	70% C_2F_5Cl , 30% CF_3Br	(2ème Lot)
Densité du liquide	0,90 gr/cm ³ (1er Lot) et 1,26 gr/cm ³ (2ème Lot)	
Longueur de radiation	22 cm (1er Lot) et 17 cm (2ème Lot)	
Probabilité moyenne de matérialisation d'un γ de 100 MeV/c	$\sim 50\%$	
Probabilité moyenne de spiralisation pour un électron de K_β	$\sim 55\%$	
Moment du faisceau de K^+	800 MeV/c	
Nombre moyen de K^+ par photo	13 (1er Lot) et 10 (2ème Lot)	
Nombre moyen d'échange de charge par photo	0,89 (1er Lot) et 1,1 (2ème Lot)	
Proportion d'échange de charge inélastique	$\sim 7\%$	
Nombre total de photos	~ 200.000	

A - ETUDE DU MODE $\pi^+ \pi^-$

C'est de beaucoup le mode de désintégration observé le plus fréquent : on le trouve dans environ une photo sur trois; il est très facile à trouver et à reconnaître car la désintégration a toujours lieu près du point d'interaction du K^+ , à 4 cm en moyenne, ce qui ne sera pas vrai pour les désintégrations en trois corps.

L'intérêt de l'étude des modes $\pi^+ \pi^-$ vient du fait qu'il nous permet d'atteindre de très importants résultats sur les conditions expérimentales : il peut nous renseigner exactement sur la composition du flux K^0 produits dans la chambre :

a) Le nombre de désintégrations du $\pi^+ \pi^-$ observé permet, après correction pour biais expérimentaux, de connaître le nombre de K_1^0 produits car on connaît très bien la proportion de K^0 se désintégrant suivant le mode $\pi^+ \pi^-$ ($69.3 \pm 1,1\%$ Ref.26).

b) La mesure d'un événement permet de connaître très bien la valeur du moment du K^0 ; en effet nous mesurons la direction et le moment des deux pions (le moment est mesuré avec une erreur d'environ 15 à 30% et même de 5% pour un π qui s'arrête dans la chambre), ainsi que la direction de la ligne de vol du K^0 ; nous mesurons donc 8 quantités qui doivent vérifier trois équations de contraintes cinématiques. Une méthode d'ajustement des paramètres permet de trouver les meilleures valeurs à donner à ces 8 quantités pour qu'elles vérifient les équations de contraintes, et on peut calculer alors le moment du K^0 . On obtient ainsi pour chaque désintégration $\pi^+ \pi^-$, une mesure du moment du K^0 avec une erreur calculée d'environ 5%.

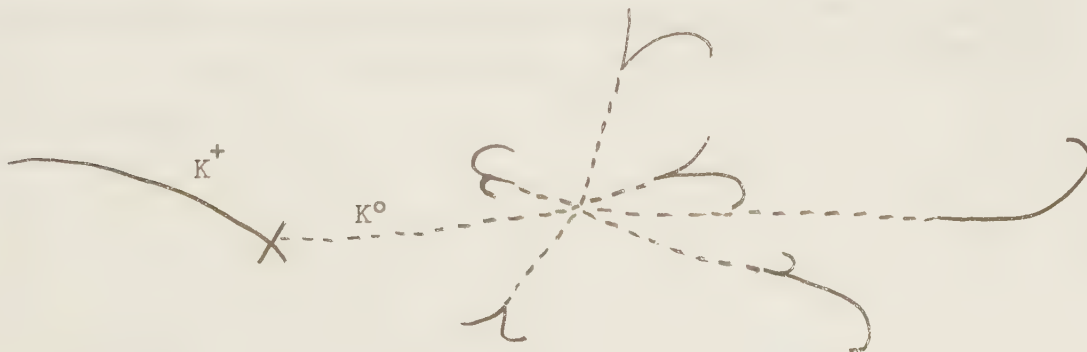
L'étude de ce mode de désintégration permet ainsi de connaître, en plus du nombre de K^0 produits, la distribution dans la chambre des interactions de K^+ produisant les K^0 , ainsi que la distribution de l'orientation des lignes de vol et des moments de K^0 émis, c'est-à-dire fournit absolument toute l'information sur la production des K^0 dans la chambre.

Nous avons donc extrait de toute l'expérience un lot d'environ un millier de désintégrations $\pi^+\pi^-$ réparti sur l'ensemble des photographies. Ces événements ont été étudiés du point de vue cinématique puis pondérés pour tenir compte des pertes géométriques ou dues à l'efficacité de scanning afin d'avoir un lot non biaisé de K^0 , représentatif de l'ensemble des productions de K^0 . Ce lot d'événements nous servira pour l'étude de tous les autres modes de désintégrations du K^0 . L'exposé de la méthode d'analyse a été faite en référence (40).

A titre de vérification de la méthode on a mesuré, à l'aide des temps de vie des événements, la vie moyenne du K_S^0 ; le résultat trouvé est : $\tau_S = (0,84 \pm 0,05) 10^{-10}$ sec., la valeur expérimentale la plus récente étant actuellement $\tau_S = (0,865 \pm 0,019) 10^{-10}$ sec. (Réf. 26)

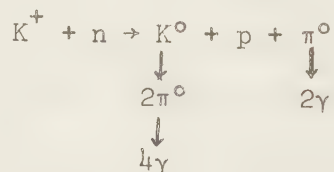
B - LE MODE $K^0 \rightarrow 3\pi^0$

Ce mode de désintégration apparaît dans la chambre sous la forme de plusieurs γ semblant provenir du même point de la chambre



On ne considère que les événements à 5 ou 6 γ pour ne pas avoir d'événements du type $K^0 \rightarrow 2\pi^0$.

D'autre part du fait de l'existence d'échanges de charge de K^+ inélastiques, la chaîne



peut aussi produire 5 ou 6 γ qui sembleront provenir du même point si le K^0 se désintègre suffisamment près de son origine, ce qui arrive en général car dans l'hypothèse CP conservé seul $K_1^0 \rightarrow 2\pi^0$. Pour éliminer ce bruit de fond on a donc exigé que la ligne de vol du K^0 soit plus longue que 1 cm.

En référence (32) est exposée la méthode d'analyse, dans l'hypothèse CP conservé l'expérience permet alors de déterminer le taux absolu de désintégration :

$$\Gamma (K_2^0 \rightarrow 3\pi^0) = 4.92 \pm 1.08 - 0.92 \cdot 10^6 / \text{sec}$$

avec 29 événements de ce type.

Si on se place dans l'hypothèse ou CP n'est pas conservé on peut théoriquement par l'étude de la distribution en fonction du temps déterminer le rapport

$$\frac{A (K_S^0 \rightarrow 3\pi^0)}{A (K_L^0 \rightarrow 3\pi^0)}$$

En fait cette étude est très difficile à mener à bien dans notre expérience et nous allons exposer les raisons qui nous ont fait décider de ne pas l'entreprendre.

a) On ne mesure que des électrons de gammas, avec des erreurs très grandes (l'énergie moyenne d'un γ de $\pi^0\pi^0\pi^0$ est de 100 MeV). Ceci entraîne que l'analyse cinématique est assez mauvaise; en particulier il y a 15 manières différentes d'associer les 6γ de désintégration pour faire $3\pi^0$ et on ne peut guère en rejeter plus de la moitié comme incompatibles cinématiquement. On ne peut donc pas déterminer le moment du K^0 .

D'autre part pour les événements à 5γ (environ 80% des événements) il n'est pas toujours possible de connaître l'origine car il peut s'en trouver plusieurs acceptables dans la photo.

Toutes ces raisons font qu'il est assez difficile d'attribuer un temps de vol à nos $3\pi^0$.

b) La coupure en longueur de vol du K^0 nous supprime le début de la distribution en temps des désintégrations. Or cette zone est celle où le K_S se désintègre; elle est donc nécessaire pour pouvoir estimer le rapport $\frac{\Gamma(K_S \rightarrow 3\pi^0)}{\Gamma(K_L \rightarrow 3\pi^0)}$. Nous pouvons donc penser que notre lot d'évé-

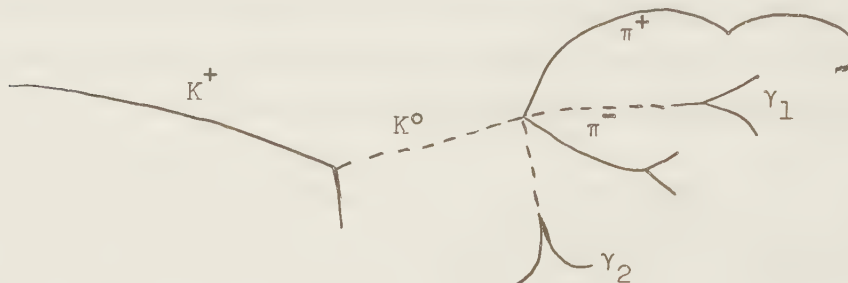
$$\Gamma(K_L \rightarrow 3\pi^0)$$

nements manquera d'efficacité pour mesurer ce rapport.

c) Nous verrons plus loin que l'étude similaire faite sur le mode $\pi^+\pi^-\pi^0$ avec 135 événements ne permet pas de donner des résultats extrêmement précis. Ici nous n'avons que 29 événements avec les défauts signalés en a) et b). Il est certain que le résultat que nous pourrions obtenir serait entaché de telles erreurs qu'il en perdrait toute signification pratique.

C - LE MODE $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$

Ce mode de désintégration apparaît dans la chambre d'une façon assez analogue au mode $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$, mais il peut se désintégrer plus loin de son origine puisque pour CP conservé $K_1^0 \rightarrow 3\pi$ est interdit. Nous exigeons de plus de voir 1 ou 2 γ de désintégration du π^0 pointant sur le vertex du " γ " $\pi^+ \pi^-$.



L'étude a porté sur 135 désintégrations de ce type ce qui en montre la rareté. Du fait de l'énergie nécessairement emportée par le π^0 les deux π chargés sont en moyenne moins énergiques que ceux d'une désintégration $\pi^+ \pi^-$ et assez souvent l'un ou même les deux π s'arrêtent dans la chambre. La mesure du moment des traces chargées est alors en général suffisamment précise pour que l'analyse cinématique permette de bien séparer les vraies désintégrations des bruits de fond possibles, en particulier $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- + 1$ ou 2γ aléatoires et $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma$, les quelques événements ambigus ont été pondérés. La méthode d'analyse et les résultats ont été exposés en référence (32). Notons seulement que le moment du K^0 est très bien déterminé lorsque les 2γ sont visibles, moins bien lorsqu'un seul des γ est visible (on a une seule contrainte à imposer sur la désintégration et l'énergie du γ est mal mesurée).

D - LE MODE $K^0 \rightarrow \pi e \nu$

C'est un mode de désintégration assez rare puisqu'on le rencontre dans environ une photo sur mille. Les candidats retenus (que nous appellerons K_β) sont des "V" dont une trace est un électron reconnu par spiralisation et dont l'autre peut s'interpréter comme étant un méson π . Un certain nombre de critères * leur sont de plus imposés de façon à ne garder que des événements bien mesurables pour lesquels une étude cinématique est possible.

Cette étude doit fournir les caractéristiques de la désintégration en particulier le moment du K^0 nécessaire pour la détermination du temps de vie.

Ici une première difficulté se présente : du fait du nombre assez élevé de K^+ entrant dans la chambre par photo il peut se faire que ces K^+ donnent par échange de charge des K^0 dont environ les deux tiers ne se désintègrent pas suivant le mode $\pi^+ \pi^-$ et peuvent ne pas être observés (le K_L^0 a une probabilité de désintégration par unité de temps très faible vis-à-vis des dimensions de la chambre). Dans ce cas nous avons pour un seul candidat K_β dans la photo plusieurs origines possibles entre lesquelles nous devons choisir afin de donner un temps de vie au K_β . De plus l'étude de notre lot de désintégration $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ nous ayant montré que seulement 6% des interactions de K^0 se font avec émission d'un π reconnu ou d'une trace non identifiée nous n'avons considéré comme origine possible pour nos K_β que des origines dont les traces sortantes sont identifiées comme des protons. Nous perdons ainsi 6% des vraies origines, mais nous nous affranchissons du

* Voir référence (41) Nous rappellerons certains de ces critères dans le chapitre IV.

nombre considérable de fausses origines constituées par des interactions de π , interactions et désintégrations de K (2 à 3 par photo en moyenne). Sous ces conditions le tableau page 149 donne la distribution du nombre d'origines par événement. Les événements sans origine sont pour la plupart des événements dont l'origine se trouve à l'extérieur de la chambre (dans la fenêtre d'entrée principalement). L'étude du problème posé par ces événements a été faite en référence (41).

Nous demanderons donc à l'analyse cinématique de nous dire quelles sont les origines possibles et celles qui ne le sont pas.

E - LE MODE $K^0 \rightarrow \pi \mu \nu$

La difficulté d'observation de ce mode a conduit à faire des coupures extrêmement sévères sur les candidats pour éliminer les désintégrations de bruit de fond $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ avec un des deux π non identifié. D'autre part on a cherché à avoir un nombre de mesures à faire suffisamment peu élevé. En particulier on a imposé à la ligne de vol du K^0 d'avoir une longueur projetée supérieure à 3 cm. La méthode d'analyse est assez voisine de celle utilisée pour les désintégrations $K^0 \rightarrow \pi e \nu$ et a été exposée en référence (40).

Le nombre d'événements retenus est de 9 désintégrations de chaque signe.

Comme pour la désintégration en $3\pi^0$ le faible nombre d'événements ainsi que la coupure très stricte en longueur de vol interdit de faire une analyse utile de la distribution des événements en fonction du temps. Nous ne pouvons donc faire aucun test de CP/de $\Delta S = \Delta Q$. Bien que comme nous l'avons dit chapitre V, 1ère partie, ces tests apportent des renseignements plus complets que lorsqu'ils sont faits seulement sur le mode $K \rightarrow \pi e \nu$.

CHAPITRE 11 : ANALYSE CINEMATIQUE DES DESINTEGRATIONS K_{β}

A - LA MESURE

Chaque candidat K_{β} a été mesuré sur un appareil à coordonnées bipolaires, puis cette mesure a été exploitée sur l'ordinateur Bull 1 E T du Collège de France à l'aide du programme de reconstruction géométrique Bull $\square$ (Ref.42) qui calculait la position des points dans l'espace ainsi que la direction des traces et le moment des traces chargées.

La figure 1 montre l'orientation du système d'axe par rapport à la chambre et donne les définitions des grandeurs calculées par le programme de reconstitution géométrique.

Les figures 2 à 9 montrent les distributions des erreurs fournies par le programme.

B - LA CINEMATIQUE

La première analyse à laquelle on peut penser consiste à résoudre les quatre équations de conservation du moment et de l'énergie pour calculer le moment du K^0 nécessaire à l'estimation du temps de vie.

La résolution fournit zéro, une ou deux solutions de moment positif.

a) Si on a zéro solution on peut dire que l'événement n'est pas un bon événement K^0 ou bien que l'origine choisie n'est pas la bonne.

b) Si on a deux solutions il y a deux temps de vie possibles et il faudra traiter les événements de ce type de manière spéciale.

c) Si on a une solution on a un temps de vie.

Cette méthode a le gros inconvénient de ne pas tenir compte des erreurs de mesure qui peuvent, soit faire disparaître la solution correcte, soit, pour une mauvaise origine, faire naître des solutions incorrectes qui n'existeraient pas sans erreur de mesure. De plus l'erreur sur le moment calculé du K^0 est grande et dans le cas de deux solutions on a aucun moyen de choisir ce qui peut conduire jusqu'à une complète indétermination du moment du K^0 . Nous voyons donc l'intérêt très grand qu'il y aurait à disposer d'une information supplémentaire sur le moment du K^0 . Nous pouvons chercher cette information du côté de la production du K^0 ; malheureusement les échanges de charges de K^+ se faisant sur des noyaux complexes il est impossible de faire une étude cinématique correcte de la production. Cependant nous avons pensé qu'il devrait rester quand même une corrélation entre l'angle d'émission et le moment.

Corrélation entre le K^+ et le K^0

Pour étudier cette corrélation nous nous sommes adressés à notre lot de désintégrations $K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ pour lesquelles on connaît le moment du K^0 avec, comme nous l'avons dit, une précision de l'ordre de 5%.

Les figures 10 et 14 montrent cette corrélation. Le résultat de cette étude et que l'on peut définir un moment p_0 fonction de l'angle d'émission $\theta_{K^+K^0}$; les moments des K^0 étant distribué autour de p_0 avec un écart standard ne dépendant que peu de $\theta_{K^+K^0}$ et estimé à $0,30 p_0$.

Nous pouvons maintenant utiliser ce moment pour calculer sans ambiguïté le temps de vie. Une telle méthode est correcte et a été utilisée au début de l'expérience (Ref. 41). Elle a l'inconvénient de fournir un K_β avec des moments ne satisfaisant pas les équations cinématiques ce qui est gênant pour d'autres aspects de l'expérience, on ne peut en particulier pas calculer les variables dans le centre de masse chose nécessaire pour l'étude du facteur de forme. C'est pourquoi nous avons finalement préféré développer une autre méthode exempte des inconvénients de la précédente et utilisant mieux l'information; elle fournit en particulier une meilleure estimation du moment du K^0 .

Cette méthode consiste à utiliser le moment p_0 comme une mesure indépendante du moment du K , mesure faite avec une erreur de 30% (largeur estimée de la distribution des moments des K autour de p_0). On a alors une contrainte entre les variables mesurées : la masse du neutrino que l'on peut calculer doit être nulle. Le problème qui se pose est de trouver des nouvelles valeurs des variables aussi proches que possible des valeurs mesurées et satisfaisant la contrainte sur la masse du neutrino. Ce problème est résolu par la méthode classique de l'ajustement paramétrique ou fit :

On obtient un " χ^2 " qui permet d'apprécier le bien fondé de l'hypothèse et des variables "fittées" dont on peut en particulier déduire le moment du K^0 "fitte" p_f ; c'est ce moment qui nous servira pour le calcul de temps de vie.

Test de la Méthode

Cette méthode doit être correcte; nous avons cependant fait un certain nombre de tests pour voir si il n'y avait pas de déformations systématiques dues par exemple au "fit". Certains de ces tests peuvent se faire directement sur les événements, d'autres ont été faits à l'aide d'une reconstruction du processus mesure-fit par une méthode de Monté Carlo (voir chapitre IV) : on construit un lot de K_β ayant les mêmes caractéristiques que les événements expérimentaux, on déforme ensuite les variables dans les erreurs par tirage au sort pour tenir compte de la mesure puis on fitte avec la même méthode que celle employée pour ces événements expérimentaux.

a) Distribution des χ^2

Les figures 11 et 12 montrent la comparaison des distributions de χ^2 pour les événements expérimentaux et ceux du Monté Carlo avec la distribution théorique de la loi du χ^2 à un degré de liberté. L'accord entre ces trois distributions est assez bon, on remarque cependant que la probabilité décroît moins vite lorsque χ^2 croît que pour la loi théorique. Nous pouvons envisager plusieurs causes à ce phénomène :

1) La contrainte n'est pas une fonction linéaire des variables mesurées ce qui est nécessaire pour démontrer que le χ^2 suit bien la loi théorique.

2) Les erreurs sur les variables mesurées peuvent n'être pas absolument gaussiennes.

3) Les erreurs/^{sur les} variables mesurées dont dépend le processus de fit peuvent être mal estimées.

4) Nous avons porté sur l'histogramme (Fig. 11) toutes les origines possibles bien qu'une seule au plus soit la bonne et une origine fausse doit donner plutôt un mauvais X^2 .

5) Le fit qui utilise un processus itératif avec linéarisation locale des contraintes doit normalement fournir une solution pour laquelle le X^2 est stationnaire. Mais cette solution n'est pas forcément toujours la meilleure. Et de plus^{la} convergence vers une solution n'est pas toujours assurée.

Seules les causes numéro 1 et 5 entrent en ligne de compte pour les événements du Monté-Carlo car le fit cinématique a été fait avec les erreurs mêmes qui ont servi à déformer de manière gaussienne les variables mesurées et on a toujours choisi la vraie origine.

La différence entre les événements expérimentaux et ceux du Monté Carlo peut bien être expliquée par la cause N° 4, de sorte que nous avons de bonnes raisons de penser que les causes 2 et 3 n'interviennent pas beaucoup.

Ce même phénomène de déformation de la distribution de X^2 caractérisé par une augmentation de la probabilité d'avoir un X^2 élevé peut d'ailleurs être remarqué, quoique avec une importance moindre, sur la distribution de X^2 de nos désintégrations $K_1^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ (fit cinématique à trois contraintes).

Quoiqu'il en soit tout ceci doit nous enseigner une certaine prudence dans l'utilisation du X^2 .

b) Test sur les origines fausses

Parmi nos événements nous en avons 142 ayant une seule origine possible. Pour ces événements, à l'exception de ceux ayant leur vraie origine à l'extérieur de la chambre ou non retenue (environ 15% des événements), nous connaissons la vraie origine. Nous pouvons donc tester sur ces événements la distribution du X^2 pour les vraies origines et pour des fausses origines choisies au hasard (on a pris les origines de K_β dans d'autres photos). La figure 13 montre en fonction de la coupure en X^2 faite la proportion de vraies origines gardées et de fausses coupées.

On peut remarquer d'abord que même pour des coupures en X^2 très élevées environ 6% des "vraies" origines sont coupées, ceci vient du fait qu'environ 15% des origines dites "vraies" sont en réalité fausses comme nous l'avons dit.

Nous avons choisi de garder comme origine possible les origines de $X^2 < 13$ ce qui nous a semblé un bon compromis entre le rejet des vraies origines et celui des fausses. Pour une telle coupure la figure 13 montre qu'une fausse origine a 60% de chance d'être gardée.

c) Test sur la mesure du moment du K

Les figures 14 et 15 montrent la corrélation entre le moment vrai du K et p_θ d'une part p_f de l'autre pour les événements du Monté Carlo. Il apparaît que les deux distributions sont bien centrées et que la dispersion de p_f est moindre que celle de p_θ : notre méthode nous fournit une estimation non biaisée du moment du K légèrement meilleure que celle consistant à prendre p_θ , en effet l'erreur quadratique relative n'est plus que d'environ 26% au lieu de 30%.

C - POIDS DES ORIGINES

Même après une telle étude cinématique il peut rester pour un événement plusieurs origines possibles et nous aimerions connaître les probabilités respectives de chacune, d'être la vraie origine. C'est-à-dire que nous voulons connaître la probabilité à priori d'obtenir les résultats de mesure que nous avons eu : $p_k^m \theta_k^m \phi_k^m$, $p_e^m \theta_e^m \phi_e^m$, $p_\pi^m \theta_\pi^m \phi_\pi^m$ étant les valeurs mesurées des moments et des angles du K de l'électron et du π nous voulons évaluer la densité de probabilité de ces valeurs (que nous noterons dans la suite x_μ^m); c'est une fonction $\mathcal{P}(x_\mu)$ telle que $\int \mathcal{P}(x_\mu) dx_\mu = 1$.
Le principe a été énoncé en référence (22) (La démonstration en est refaite en Annexe I). Le résultat est (lorsqu'une contrainte lie les variables mesurées comme ici)

$$\mathcal{P}(x_\mu) = \sqrt{\frac{X^2}{2\pi}} e^{-\frac{X^2}{2}} P(\theta_k^f) \left| \frac{\mathcal{D}(\theta, c)}{\mathcal{D}(x)} \right| \frac{1}{C^m} \quad (1)$$

- C^m est la valeur de la contrainte fonction des x_μ^m
- X^2 est fournit par le fit cinématique
- θ_k^f sont les valeurs des variables définissant la désintégration; elles sont déduites des x_μ^f fournis par le fit cinématique
- $P(\theta_k)$ est la densité de probabilité de ces variables

$$\int P(\theta_k) d\theta_k = 1$$

- $\frac{\mathcal{D}(\theta, c)}{\mathcal{D}(x)}$ est le Jacobien permettant de passer des variables θ_k et C aux variables x_μ ; ce Jacobien doit être calculé pour les valeurs x_μ^f des variables.

Ici nous avons choisi comme contrainte le carré de la masse du neutrino : $m_\nu^2 = (E_k - p_e - E_\pi)^2 - (\vec{p}_k - \vec{p}_e - \vec{p}_\pi)^2$

CALCUL DE $\mathcal{D}(x_\mu)$

Nous choisissons comme variables $\theta_k : p_k, \theta_k, \phi_k, E_e^*, E_\pi^*, \cos \theta_e^*, \phi_e^*, \phi_\pi^*$ les trois premières étant relatives au K^0 , les cinq dernières précisant la désintégration du K^0 dans son centre de masse. Le déterminant $\frac{\mathcal{D}(\theta, c)}{\mathcal{D}(x)}$ ou plutôt on inverse $J^{-1} = \frac{\mathcal{D}(x)}{\mathcal{D}(\theta, c)}$ s'écrit :

$$J^{-1} = \frac{\mathcal{D}(p_k, \theta_k, \phi_k, p_\pi, \theta_\pi, \phi_\pi, p_e, \theta_e, \phi_e)}{\mathcal{D}(p_k, \theta_k, \phi_k, E_e^*, E_\pi^*, \cos \theta_e^*, \phi_e^*, \phi_{\pi/e}^*, m_v^2)} = \frac{\mathcal{D}(p_\pi, \theta_\pi, \phi_\pi, p_e, \theta_e, \phi_e)}{\mathcal{D}(E_e^*, E_\pi^*, \cos \theta_e^*, \phi_e^*, \phi_{\pi/e}^*, m_v^2)}$$

$$J^{-1} = \frac{\mathcal{D}(p_e, \cos \theta_e, \phi_e)}{\mathcal{D}(E_e^*, \cos \theta_e^*, \phi_e^*)} \times \frac{\mathcal{D}(p_\pi, \cos \theta_\pi, \phi_\pi)}{\mathcal{D}(E_\pi^*, \phi_{\pi/e}^*, m_v^2)} \times \frac{1}{\sin \theta_\pi \sin \theta_e}$$

Nous avons utilisé le fait que $p_e, \cos \theta_e, \phi_e$ ne dépendent que de $E_e^*, \cos \theta_e^*, \phi_e^*$.

On a :

$$m_v^2 = m_\pi^2 + 2E_\pi^* E_e^* - p_\pi^* p_e^* \cos \theta_{\pi e}^*$$

d'où :

$$\frac{\mathcal{D}(p_\pi \cos \theta_\pi \phi_\pi)}{\mathcal{D}(E_\pi^*, \phi_{\pi/e}^*, m_v^2)} = \frac{\mathcal{D}(p_\pi \cos \theta_\pi \phi_\pi)}{\mathcal{D}(p_\pi^* \cos \theta_{\pi/e}^*, \phi_{\pi/e}^*)} \times \frac{1}{\beta_\pi^* p_\pi^* p_e^*}$$

Nous pouvons maintenant faire des changements de référentiels sur les angles définissant p_π^* et p_π^* (le Jacobien de ces transformations étant égal à 1).

En particulier si nous choisissons les référentiels avec l'axe z le long de la ligne de vol du K nous obtenons :

$$\frac{\mathcal{D}(p_\pi \cos \theta_\pi \phi_\pi)}{\mathcal{D}(p_\pi^*, \cos \theta_{\pi/e}^*, \phi_{\pi/e}^*)} = \frac{\mathcal{D}(p_x, p_y, p_z)}{\mathcal{D}(p_x^*, p_y^*, p_z^*)} \times \frac{p_\pi^{*2}}{p_\pi^2} = \frac{p_\pi^{*2}}{p_\pi^2} \frac{\sigma_{p_z}^*}{\sigma_{p_z}}$$

or

$$p_z = \frac{E_k}{M_k} p_z^* + \frac{p_k}{M_k} \sqrt{m_\pi^2 + p_x^{*2} + p_y^{*2} + p_z^{*2}}$$

d'où

$$\frac{\sigma_{p_z}}{\sigma_{p_z}^*} = \frac{E_k}{M_k} + \frac{p_k}{M_k} \frac{p_z^*}{E_\pi^*} = \frac{E_\pi}{E_\pi^*}$$

Le calcul sera le même pour le facteur concernant l'électron; tous calculs faits on obtient finalement :

$$J = \beta_{\pi} p_{\pi} \sin \theta_{\pi} \times p_e \sin \theta_e \quad (2)$$

Ce résultat étant, comme on devrait s'y attendre, symétrique en π et électron ($\beta_e = 1$).

Il nous reste maintenant à évaluer $P(\theta_k)$, nous l'écrivons :

$$\frac{W(\theta_k)}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{p\theta}} e^{-\frac{(p_k - p_{\theta})^2}{2 \sigma_{p\theta}^2}} \mathcal{D}(E_e^*, E_{\pi}^*) \quad (3)$$

- $W(\theta_k)$ est la loi de probabilité d'émission du K^0 à l'angle θ_k par rapport au K^+ ; nous l'avons déduit de l'observation de notre lot de $K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-$

$$\int W(\theta_k) d\theta_k = 1$$

- La loi gaussienne correspond à la dispersion des moments de K^0 autour de la valeur moyenne p_{θ} . D'après ce que nous avons dit plus haut nous avons pris pour erreur quadratique moyenne $\sigma_{p\theta} = \sigma \times p_{\theta}$ avec $\sigma = 0,30$

- $\mathcal{D}(E_e^*, E_{\pi}^*)$ est l'élément de matrice de la désintégration.

Nous avons pris :

$$\mathcal{D}(E_e^*, E_{\pi}^*) = \frac{4E_e^* E_{\pi}^* + 2M_K E_{\pi}^* - (M_K^2 + M_{\pi}^2)}{\int [4E_e^* E_{\pi}^* + 2M_K E_{\pi}^* - (M_K^2 + M_{\pi}^2)] dE_e^* dE_{\pi}^*}$$

qui correspond à l'hypothèse V - A.

(1) nous fixe la loi de probabilité des variables angulaire et de moment; comme nous voulons comparer des probabilités pour diverses origines il faut de plus nous intéresser à la position dans la chambre du point de désintégration du K_β et nous devons choisir les mêmes variables de désintégration quelles que soient les origines.

Au lieu des variables déjà définies nous sommes donc amenés à choisir pour variables " θ_k " les variables suivantes :

$$p_\pi, \theta_\pi, \phi_\pi, p_e, \theta_e, \phi_e, \vec{x}_\beta \text{ et } u = \frac{p_k}{p_0}$$

$\vec{x}_\beta$ représente les coordonnées du point de désintégration, le même pour toutes les origines, la valeur mesurée de u est également la même pour toutes les origines : par définition $u^m = 1$.

Pour finir de préciser la loi de désintégration du K nous introduisons maintenant la loi de désintégration en fonction du temps soit $f(t)$, t étant le temps de vie.

La transformation des variables p_k, θ_k, ϕ_k, t aux variables $u, \vec{x}_\beta$ se fait par l'intermédiaire de la formule

$$dp_k d\theta_k d\phi_k dt = p_0 du d\vec{x}_\beta \frac{1}{l^2} \frac{M_k}{p_k} \frac{1}{\sin \theta_k} \quad (4)$$

ou l est la distance du k_β à l'origine : $l = \frac{M_k}{p_f} t_f$

Finalement les formules (1) à (4) permettent d'écrire la loi de probabilité des variables mesurées :

$$u f(t) \quad (5)$$

avec l'intégrale de normalisation

$$\int \mu f(t_f) d\vec{x}_\beta^m dp_\pi^m d\theta_\pi^m d\phi_\pi^m dp_e^m d\theta_e^m d\phi_\pi^m du = \int f(t) dt \quad (6)$$

où μ est donné par l'expression suivante :

$$\mu = \frac{W(\theta_k^f)}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{\left(\frac{p_k^f}{p_0}\right)^2}{2\sigma^2}} \mathcal{D}(E_e^*, E_\pi^*) \sqrt{\frac{X^2}{2\pi}} e^{-\frac{X^2}{2}} \frac{M_k}{|m_v^2|} \times \frac{\beta_\pi^f p_\pi^f p_e^f}{e^2 p_k^f} \left| \frac{\sin \theta_\pi^f \sin \theta_e^f}{\sin \theta_k^f} \right| \quad (7)$$

Dans l'expression (7) nous pouvons distinguer plusieurs contributions. Le début de l'expression rend compte de la probabilité à priori de la configuration; le milieu rend compte de l'influence des déformations dues aux erreurs de mesures (par le X^2 et par la valeur de la contrainte m_v^2); la dernière partie rend compte de l'influence du choix des variables mesurées (en particulier si l'on avait choisi comme variables $\cos \theta_\pi$ et $\cos \theta_e$ les termes en $\sin \theta_\pi^f$ et $\sin \theta_e^f$ disparaîtraient quant au terme $\frac{1}{\sin \theta_k^f}$ il vient du choix de la variable θ_k dans W au lieu de $\cos \theta_k$).

Sachant qu'une des origines dans la photo est la vraie origine, la probabilité pour qu'une origine j soit la bonne sera :

$$q_j = \frac{\mu_j f(t_j)}{\sum_{j=1}^o \mu_j f(t_j)} \quad (8)$$

- μ_j est défini par l'équation (7) relativement à l'origine j
- t_j est le temps de vol pour l'origine j
- q_j sera appelé le poids de l'origine j , nous verrons au chapitre III l'usage que l'on peut en faire.

Les figures 16 et 17 montrent l'histogramme des poids des origines calculés par cette méthode et calculés par une méthode ne faisant que des considérations géométriques (référence 41). La comparaison de ces deux histogrammes montre le gain apporté par cette méthode plus élaborée : il y a plus d'origines à poids très voisin de 1 ou de 0 c'est-à-dire presque sûrement vraies ou presque sûrement fausses.

REMARQUE

a) En toute rigueur nous devrions considérer les poids q_j plutôt comme une évaluation de la probabilité d'une origine que comme l'exprimant vraiment. En effet pour arriver à l'expression que nous avons donnée pour ces poids il est nécessaire de faire un assez grand nombre d'hypothèses (voir Annexe I). Il se trouve que ces hypothèses sont pour l'essentiel les mêmes que celles faites pour le calcul de la distribution de X^2 ; les critiques que l'on peut faire sont donc également les mêmes : (points 1, 2, 3 et 5 du paragraphe a) page 88). Le relativement bon accord entre les distributions de X^2 expérimentales et théoriques nous amène à avoir une bonne confiance dans le calcul de nos poids.

Quoiqu'il en soit les expressions (5) et (6) sont des définitions correctes de la probabilité, seule l'expression (7) de μ est le résultat d'approximations.

b) Possédant ainsi un moyen de pondérer les origines qui tient compte de la cinématique il n'est plus nécessaire d'effectuer une coupure sur les X^2 des origines car un des buts de cette coupure était de nous sélectionner les bonnes origines. Cependant nous avons continué à imposer à nos K_β d'avoir au moins une origine de $X^2 < 13$ en vue d'éliminer le plus possible les bruits de fonds d'événements venus de l'extérieur ou à origines non retenues ainsi que les événements qui ne sont pas des K_β , car la méthode comme nous l'avons présentée, n'en tient pas compte.

CHAPITRE III : LE MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE.

Ayant déterminé le temps de vie de chaque événement, nous devons maintenant évaluer les paramètres dont dépend la loi de désintégration et que nous avons définis au chapitre 1 VI, page 66.

La théorie nous apprend qu'en général la meilleure méthode pour faire une telle estimation de paramètre est la méthode du maximum de vraisemblance (Ref. 43). Nous allons donc exposer brièvement cette méthode dans le cadre particulier de notre expérience.

A - CAS D'ÉVÉNEMENTS A UNE SEULE ORIGINE

Nous avons donné la loi de désintégration du K_β (Eq. 6 chapitre 1 VI) Nous allons ici l'écrire $C \Gamma_\beta^L f(t, s, \lambda)$ où :

- t est le temps de vie de l'événement
- s son signe (s peut prendre les valeurs + et -)
- Γ_β^L est le taux absolu de désintégration de $K_L \rightarrow \pi e \nu$
- λ représente les autres paramètres que nous cherchons à déterminer ($\alpha \beta \Delta m$ par exemple)
- C est une constante dépendant des conditions expérimentales en particulier du nombre de photo étudié et du nombre d'échanges de charge par photo.

La probabilité d'obtenir dans l'expérience N événements avec des signes s_i et des temps t_i est :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{N!} e^{-C \Gamma_\beta^L \int f dt ds} \prod_{i=1}^N C f(t_i, s_i, \lambda) \Gamma_\beta^L \quad (1) \quad *$$

* Le nombre d'événements attendu dans toute l'expérience est $C \Gamma_\beta^L \int f dt ds$

on a :
$$\sum_{N=0}^{\infty} \int \mathcal{F} \pi_1^N dt_i ds_i = 1 \quad (2)$$

La méthode du maximum de vraisemblance consiste à prendre comme estimation des paramètres λ et Γ_{β}^L les valeurs rendant maximum $\mathcal{F}$ ou encore W défini par :

$$W = \text{Log}(N! \mathcal{F}) - N \text{Log } C = \sum_1^N \text{Log } f(t_i, s_i, \lambda) - C \Gamma_{\beta}^L \int f dt ds + N \text{Log } \Gamma_{\beta}^L \quad (3)$$

Nous allons voir que l'on peut séparer complètement le problème de la recherche des λ de celui de la recherche de Γ_{β}^L : en effet le maximum de W s'obtient pour $\frac{\partial W}{\partial \Gamma_{\beta}^L} = 0$ soit :

$$\Gamma_{\beta}^L = \frac{N}{T} \quad (4)$$

avec $T = C \int f ds dt \quad T = C \int (f(t, +, \lambda) + f(t, -, \lambda)) dt \quad (5)$

T est une fonction des λ , nous l'appellerons temps observable car il a les dimensions d'un temps : on peut l'interpréter comme le temps total pendant lequel on a pu observer et détecter les K_{β} dans la chambre tout au long de l'expérience.

Compte tenu de 4 et 5, 3 peut se réécrire :

$$W = \sum_1^N \text{Log } f_1(t_i, s_i, \lambda) \quad * \quad (6)$$

en posant $f_1(t_i, s_i, \lambda) = \frac{f(t_i, s_i, \lambda)}{\int f dt ds} \quad \int f_1 dt ds = 1 \quad (7)$

f_1 ne dépend pas de Γ_{β}^L : ceci montre que la recherche des paramètres λ ne dépend pas de Γ_{β}^L ce qui d'ailleurs est évident : seule la "forme" de la loi de désintégration observée importe. Une fois les λ estimés on peut calculer T puis le taux absolu par une formule dépendant du nombre total d'événements mais pas de leur temps de-vie.

* On néglige le terme $-N + N \text{Log } \frac{N}{C}$ qui est une constante.

Qualité de l'estimation.

La première question qui se pose est de savoir si la loi trouvée explique bien la distribution expérimentale observée. En effet la méthode du maximum de vraisemblance nous dit que la loi trouvée est la meilleure parmi l'ensemble des lois proposées (à savoir l'ensemble des lois écrites comme au chapitre 1 IV) mais il se pourrait que la loi réelle n'ait aucun rapport avec ces lois. La méthode la plus simple pour s'assurer du contraire est certainement de comparer à l'oeil l'histogramme des événements expérimentaux avec la loi trouvée, normalisée au nombre d'événements total. Cette méthode est très rapide et permet de déceler les erreurs manifestes, mais nous aimerions avoir un renseignement chiffré dans le genre de celui obtenu avec la méthode du X^2 par exemple.

Nous allons donc exposer la méthode du X^2 ainsi que ce que l'on appelle le test du X^2 , comparer ^{avec} la méthode du maximum de vraisemblance pour en induire un test similaire dans la ligne de cette dernière méthode.

Méthode du X^2 .

Elle consiste à se donner des intervalles de temps définis par les valeurs $t_0, t_1, \dots, t_j, \dots, t_M$ (on doit aussi distinguer les deux signes mais nous ne ferons pas pour simplifier l'exposé). Dans chaque intervalle de temps $t_{j-1} - t_j$, soit n_j le nombre d'événements observés.

Les n_j obéissent à la loi multinomiale

$$\frac{N!}{\pi n_j!} F_j^{n_j}(\lambda) \quad \text{avec} \quad F_j(\lambda) = N \frac{\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t, \lambda) dt}{\int f(t, \alpha) dt}$$

Si le nombre d'événements est grand les n_j sont approximativement des variables normales de valeur moyenne F_j et d'écart-type $\sqrt{F_j}$ ou $\sqrt{n_j}$

la variable $X^2 = \sum_1^M \frac{(n_j - F_j(\lambda))^2}{\sqrt{F_j}}$ a donc, lorsque les paramètres λ ont

leurs vraies valeurs, une loi de distribution qui est la loi du X^2 à $M - 1$ degré de liberté (on doit retirer 1 car les variables n_j ne sont pas indépendantes : $\sum_1^M n_j = N$). La méthode d'estimation du X^2 consiste à rendre mi-

nimum l'expression $X^2 = \sum_1^M \frac{(n_j - F_j(\lambda))^2}{\sqrt{n_j}}$. Elle contient une part d'arbitraire

puisque l'on doit se donner le nombre M d'intervalles et leurs dimensions, c'est pourquoi nous avons préféré utiliser la méthode du maximum de vraisemblance. On démontre d'ailleurs que pour N et $M \rightarrow \infty$ les deux méthodes sont équivalentes.

Test du X^2 .

Il consiste à comparer la valeur minimum du X^2 obtenu à la loi de probabilité du X^2 à $M - 1 - p$ degré de liberté (p est le nombre de paramètres que l'on a calculé : il faut les retrancher car l'optimisation correspond à l'introduction de p contraintes supplémentaires entre n_j).

Si le nombre d'intervalles $M \rightarrow \infty$ la loi de probabilité comme il est bien connu tend vers une loi gaussienne avec une valeur moyenne $M - 1 - p$ et un écart-type $\sqrt{2(M - 1 - p)}$.

Test de la vraisemblance.

L'analogie entre X^2 et W nous conduit à penser que W aussi peut avoir une loi de probabilité quasi-gaussienne. Un test serait alors de comparer la valeur expérimentale obtenue, avec la valeur moyenne; nous allons montrer qu'il en est bien ainsi.

Pour cela nous allons calculer la fonction

$$\phi(u)_{[W(\lambda)]} = \text{Log} \langle e^{i u W(\lambda)} \rangle$$

La théorie des probabilités nous apprenant que la connaissance de cette fonction est équivalente à la connaissance de $W(\lambda)$. Nous noterons λ_0 la valeur vraie (et inconnue) des paramètres. Comme nous ne nous intéressons qu'à la loi de probabilité de $W(\lambda)$ pour N fixé nous aurons :

$$\langle e^{i u W(\lambda)} \rangle = \frac{\int e^{i u W} \mathcal{F} \pi dt_i}{\int \mathcal{F} \pi dt_i} = \left[\int e^{i u \text{Log} f_1(t, \lambda)} f_1(t, \lambda_0) dt \right]^N$$

$$\text{d'où} \quad \phi(u)_{[W(\lambda)]} = N \text{Log} \left[\int e^{i u \text{Log} f_1(t, \lambda)} f_1(t, \lambda_0) dt \right]$$

Soit en développant en puissance de u :

$$\begin{aligned} \phi(u)_{[W(\lambda)]} = & N \left[i u \int f_1(t, \lambda_0) \text{Log} f_1(t, \lambda) dt - \frac{u^2}{2} \left\{ \int f_1(t, \lambda_0) \text{Log}^2 f_1(t, \lambda) dt \right. \right. \\ & \left. \left. - \left[\int f_1(t, \lambda_0) \text{Log} f_1(t, \lambda) \right]^2 \right\} \right] + \dots \end{aligned}$$

D'après les théorèmes sur le développement en puissance de u , du logarithme d'une fonction caractéristique la valeur moyenne de W est :

$$\mathcal{W}(\lambda) = N \int f_1(t, \lambda_0) \text{Log } f_1(t, \lambda) dt \quad (8)$$

et l'écart-type

$$\Delta W(\lambda) = \sqrt{N} \left[\int f_1(t, \lambda_0) \text{Log}^2 f_1(t, \lambda) dt - \left(\frac{\mathcal{W}(\lambda)}{N} \right)^2 \right] \quad (9)$$

Si maintenant nous considérons la variable aléatoire

$$S(\lambda) = \frac{W(\lambda) - \mathcal{W}(\lambda)}{\Delta W(\lambda)} \quad (10)$$

le logarithme de sa fonction caractéristique est donné par :

$$\phi_{[S(\lambda)]}(u) = -\frac{u^2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} u^n \frac{K_n(\lambda)}{N \frac{n}{2} - 1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} -\frac{u^2}{2}$$

où K_n ne dépend que de $f_1(t, \lambda)$ et $f_2(t, \lambda_0)$.

Ceci montre que, quand $N \rightarrow \infty$, la variable aléatoire $S(\lambda)$ converge au sens de Bernouilli, vers la variable normale réduite.

Le test consistera donc à calculer S pour les valeurs λ_m des paramètres rendant minimum $W(\lambda)$.

En réalité nous ne connaissons pas λ_0 mais seulement une estimation λ_m , nous ne pouvons donc calculer $S(\lambda_m)$ exactement. Nous l'estimerons seulement en calculant $\mathcal{W}$ et ΔW par les formules (8) et (9) dans lequel nous remplacerons λ_0 et λ par λ_m .

Nous allons maintenant montrer que, pourvu que N soit suffisamment grand, la valeur de $S(\lambda_m)$ ainsi calculée, a encore une moyenne nulle.

Développons $f_1(t, \lambda)$ au voisinage de λ_0 jusqu'au 2ème ordre, soit:

$$f_1(t, \lambda) \approx f_0 + (\lambda - \lambda_0) \frac{\partial f}{\partial \lambda_0} + \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_0^2}$$

$$\text{avec } \int f_0 dt = 1 \quad \text{et} \quad \int \frac{\partial^n f_0}{\partial \lambda_0^n} dt = 0$$

on peut écrire ensuite

$$W \approx \sum_1^N (\text{Log } f_0 + (\lambda - \lambda_0) \sum_1^N \frac{1}{f_0} \frac{\partial f}{\partial \lambda_0} + \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \sum_1^N \left[\frac{1}{f_0} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_0^2} - \left(\frac{1}{f_0} \frac{\partial f}{\partial \lambda_0} \right)^2 \right])$$

L'équation $\frac{\partial W(\lambda)}{\partial \lambda} = 0$ admet alors pour solution

$$\lambda_m - \lambda_0 \approx - \frac{\sum_1^N \frac{1}{f_0} \frac{\partial f}{\partial \lambda_0}}{\sum_1^N \left[\frac{1}{f_0} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_0^2} - \left(\frac{1}{f_0} \frac{\partial f}{\partial \lambda_0} \right)^2 \right]} \quad (11)$$

d'où l'on déduit

$$W(\lambda_m) \approx \sum_1^N \text{Log } f_0 - \frac{1}{2} \frac{\left[\sum_1^N \frac{1}{f_0} \frac{\partial f}{\partial \lambda_0} \right]^2}{\sum_1^N \left[\frac{1}{f_0} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_0^2} - \left(\frac{1}{f_0} \frac{\partial f}{\partial \lambda_0} \right)^2 \right]} \quad (12)$$

et pour

$$W(\lambda_m) = N \int f_1(t, \lambda_m) \text{Log } f_1(t, \lambda_m) dt$$

on a

$$\begin{aligned} W(\lambda_m) \sim & N \int f_o \text{Log } f_o \, dt + (\lambda_m - \lambda_o) N \int \frac{\partial f}{\partial \lambda_o} \text{Log } f_o \, dt \\ & + \frac{1}{2} (\lambda_m - \lambda_o)^2 N \left[\int \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_o^2} \text{Log } f_o \, dt + \int \frac{1}{f_o} \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_o} \right)^2 dt \right] \end{aligned}$$

Nous allons maintenant calculer $\langle W(\lambda_m) - \mathcal{W}(\lambda_m) \rangle$ la loi de

probabilité étant $\pi \prod_{i=1}^N f_1(t_i, \lambda_o) \, dt_i$

Pour faire ce calcul nous supposons sans beaucoup de souci de rigueur que l'on peut, dans (11) et (12) prendre séparément les moyennes du numérateur et du dénominateur, on a alors :

$$\left\langle \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{f_o} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_o^2} - \frac{1}{f_o} \frac{\partial f}{\partial \lambda_o}^2 \right] \right\rangle = - N \int \frac{1}{f_o} \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_o} \right)^2 dt$$

$$\langle \lambda_m - \lambda_o \rangle \sim 0$$

$$\langle (\lambda_m - \lambda_o)^2 \rangle = \frac{1}{N \int \frac{1}{f_o} \frac{\partial f}{\partial \lambda_o}^2 dt}$$

$$\langle W(\lambda_m) - \mathcal{W}(\lambda_m) \rangle = - \frac{1}{2} \frac{\int \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_o^2} \text{Log } f_o \, dt}{\int \frac{1}{f_o} \frac{\partial f}{\partial \lambda_o}^2 dt}$$

qui est une constante alors que $\frac{\Delta W}{N} \rightarrow \infty$ comme $\sqrt{N}$ donc :

$$\langle S(\lambda_m) \rangle \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0 \text{ comme } \frac{1}{\sqrt{N}}$$

RESUME - Application pratique du test.

Connaissant la loi $f_1(t, \lambda)$ on calcul d'abord la fonction

$$W(\lambda) = \sum_1^N \text{Log } f_1(t, \lambda) \quad \text{avec} \quad \int f_1(t, \lambda) dt = 1 \quad (13)$$

Les valeurs rendant maximum $W(\lambda)$ sont les estimations λ_m cherchées.

On calcule ensuite :

$$W_e = N \int f_1(t, \lambda_m) \text{Log } f_1(t, \lambda_m) dt \quad (14)$$

et

$$\Delta W_e^2 = N \int f_1(t, \lambda_m) \text{Log}^2 f_1(t, \lambda_m) dt - \frac{W_e^2}{N} \quad (15)$$

puis la vraisemblance définie par

$$S = \frac{W(\lambda_m) - W_e}{\Delta W_e} \quad (16)$$

Le test consiste à comparer S aux valeurs attendues pour une loi normale réduite.

Expérimentalement nous avons obtenu (avec deux paramètres estimés)

$$S = - 0,10$$

Ce qui est très acceptable.

B - CORRECTIONS DUES AUX CONDITIONS EXPERIMENTALES

Nous avons utilisé jusqu'ici une fonction de probabilité $f(t, \lambda)$, qui nous avait été fournie par des considérations théoriques sur la désintégration, sans nous occuper des conditions expérimentales. Nous allons maintenant voir les deux sortes de corrections que leur prise en considération introduisent sur la fonction f .

a) Introduction de la fonction de détection.

Ce qui intervient dans la méthode du maximum de vraisemblance (et de la même manière dans celle du X^2) c'est la probabilité de voir un événement au temps t , nous devons donc remplacer dans nos équations $f(t, \lambda)$ par $f(t, \lambda) \times d(t)$, $d(t)$ étant la probabilité pour qu'un événement s'étant distingué au temps t , il soit vu. C'est une fonction qui ne dépend pas des paramètres mais seulement des conditions expérimentales. Une conséquence de ce fait est que W peut s'écrire d'après (6) :

$$W = \sum_{i=1}^N \text{Log } f(t_i, \lambda) - N \int f(t, \lambda) d(t) dt - \sum_{i=1}^N \text{Log } d(t_i)$$

Pour la recherche du maximum de W on peut négliger le dernier terme et la fonction de détection qui n'intervient que par l'intégrale $\int f(t, \lambda) d(t) dt$.

b) Correction due à l'erreur de mesure sur le temps.

On ne connaît pas le temps auquel chaque événement s'est désintégré mais seulement une évaluation t_m . La méthode que nous avons choisie est de remplacer $f(t, \lambda)$ par une fonction $f'(t_m, \lambda)$ densité de probabilité pour qu'une désintégration K_p soit observée à un temps mesuré t_m . On peut alors traiter correctement le problème en remplaçant dans le paragraphe A $f(t, \lambda)$ par $f'(t_m, \lambda)$.

Il est à remarquer que la définition adoptée pour f' inclus la probabilité de détection mais on ne peut plus comme en a) factoriser la loi.

Le problème est maintenant de calculer la fonction $f'(t_m, \lambda)$; nous l'avons résolu par une méthode de Monté-Carlo que nous décrirons chapitre IV.

C - CAS DES EVENEMENTS A PLUSIEURS ORIGINES.

Du fait de la probabilité d'avoir plusieurs origines dans la chambre (voir chapitre I paragraphe D) nous devons modifier le schéma précédent. La fonction $\mathcal{F}$ a maintenant une forme beaucoup plus compliquée.

D'après le (chapitre II paragraphe C, équations 5 et 6) nous savons que la probabilité d'avoir un K_β et une origine est:

$$C \Gamma_\beta^L \mu f(t) \quad (17)$$

avec

$$\int \mu f(t) d\vec{x}_\beta du dp_\pi d\theta_\pi d\phi_\pi dp_e d\theta_e d\phi_e = \int f(t) dt \quad (18)$$

Soit $\omega(\vec{x})$ la loi de probabilité pour avoir un K^0 émis en $\vec{x}$.

$$\int \omega(\vec{x}) d\vec{x} = m$$

où m est la probabilité d'avoir une origine K^0 dans la chambre; c'est aussi le nombre moyen d'origines dans la chambre d'après une propriété bien connue de la loi de Poisson.

La probabilité d'avoir, dans la chambre, un K_β et 0 origine s'écrit :

$$P = \frac{e^{-m}}{0!} \left[\begin{matrix} 0 \\ \pi \\ 1 \end{matrix} \omega(x_j) \right] \sum_{\beta=1}^0 C \Gamma_{\beta}^L \mu_j f(t_j) \quad (19)$$

avec

$$\sum_{\beta=1}^{\infty} P \frac{0}{\pi} \frac{dx_j}{1} \frac{dx_\beta}{1} du dp_\pi d\theta_\pi d\phi_\pi dp_e d\theta_e d\phi_e = m C \Gamma_{\beta}^L \int f(t) dt \quad (20)$$

$\omega(\vec{x})$ pourrait être connu par l'étude de notre lot de désintégration $\pi^+\pi^-$ mais comme il semble que les origines possibles tant des $\pi^+\pi^-$ que des K_β sont concentrées dans la région du faisceau avec une densité à peu près constante nous avons décidé de ne pas prendre en considération cette loi de probabilité (c'est ce que nous avons déjà fait au chapitre II, en n'incluant pas $\omega(\vec{x})$ dans le calcul de $\mu f(t)$), c'est-à-dire que nous devons intégrer sur les $\vec{dx}_j$, il vient alors :

$$P = e^{-m} \frac{m^0}{0!} \sum_{\beta=1}^0 \mu_j C \Gamma_{\beta}^L f(t_j)$$

La fonction $\mathcal{F}$ s'en déduit :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{N!} e^{-m C \Gamma_{\beta}^L \int f(t, \lambda) dt} \sum_{\pi=1}^N \sum_{O_i=1}^{\infty} e^{-m} \frac{m^{O_i}}{O_i!} \sum_{j=1}^{O_i} C \Gamma_{\beta}^L \mu_{ij} f(t_{ij}) \quad (21)$$

i étant l'indice de K_β et j l'indice d'origine

avec

$$\sum_{N=0}^{\infty} \mathcal{F} \frac{N}{\pi} \left[\frac{dx_\beta^i}{1} du^i c_{p_\pi}^i d\theta_\pi^i d\phi_\pi^i dp_e^i d\theta_e^i d\phi_e^i \right] = 1 \quad (22)$$

Nous pouvons maintenant résoudre le problème d'une manière analogue à celle utilisée dans le paragraphe A : on obtient de même

$$\Gamma_{\beta}^L = \frac{N}{T} \quad \text{avec} \quad T = m C \int f(t, \lambda) dt$$

On obtient ensuite la valeur des paramètres λ en rendant maximum la fonction :

$$W = \sum_{i=1}^N \text{Log} \left(\sum_{j=1}^{O_i} \mu_{ij} f_1(t_{ij}, \lambda) \right) \quad (23)$$

c'est-à-dire en résolvant le système d'équations

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{O_i} q_{ij} \frac{1}{f_1(t_{ij})} \frac{\partial f_1(t_{ij}, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \quad (24)$$

avec

$$q_j = \frac{\mu_j f_1(t_j)}{\sum \mu_j f_1(t_j)} \quad (25)$$

On voit ici apparaître les poids définis au chapitre II Equation 8; ils dépendent des paramètres λ .

Remarque sur la vraisemblance.

Nous devrions maintenant, en continuant le type de raisonnement du paragraphe A, calculer $\frac{\int \mathcal{F}_e^i u W du}{\int \mathcal{F} du}$ pour N et O_i fixés, malheureusement nous ne connaissons pas de forme analytique de μ et nous ne savons donc pas calculer cette intégrale. Il semble donc que nous soyons incapables de définir une fonction aléatoire S nous permettant de calculer la vraisemblance comme en A.

Cependant la forme de $\mathcal{F}$ (Eq.21) nous suggère de considérer la fonction :

$$W_1(\lambda) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{O_i} q_{ij} \text{Log } f_2(t_{ij}, \lambda) \quad (26)$$

nous ne savons pas non plus calculer la fonction caractéristique de cette variable aléatoire mais nous savons calculer sa valeur moyenne pour la vraie valeur λ_0 des paramètres :

$$W_1(\lambda_0) = \frac{\int W_1(\lambda_0) \mathcal{F} dv}{\int \mathcal{F} du} = \frac{\sum_{i=1}^N e^{-m} \frac{m^{O_i}}{O_i!} \left[\sum_{j=1}^{O_i} \mu_{ij} f_1(t_{ij}, \lambda) \right] \sum_{j=1}^{O_i} q_{ij} \text{Log } f_1(t_{ij}, \lambda_0) dx}{\sum_{i=1}^N e^{-m} \frac{m^{O_i}}{O_i!} \int f_1(t) dt} \quad (27)$$

$$W_1(\lambda_0) = N \int f_1(t, \lambda_0) \text{Log } f_1(t, \lambda) dt$$

ce qui est la valeur trouvée pour $\bar{W}(\lambda_0)$ au paragraphe A, (Eq.8).

D'autre part il se trouve que dans cette expérience les poids q_j pour un événement varient peu avec les paramètres λ (cf Ref. 41); de plus notre nouvelle méthode de pondération lève presque complètement les ambiguïtés sur les origines : les poids sont dans la grande majorité des cas très voisins ou de 1 ou de 0 : ceci accroît leur indépendance par rapport aux λ .

Si nous supposons donc les q_j constants le maximum de W_1 s'obtient pour des valeurs de λ satisfaisant à :

$$\frac{\partial W_1}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{O_i} q_{ij} \frac{1}{f_2} \frac{\partial f_2(t_{ij}, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \quad (28)$$

ce qui est le système d'équations du maximum de W .

Nous sommes donc conduits à utiliser comme estimateur W_1 au lieu de W .

Nous avons employé expérimentalement les deux estimateurs W et W_1 : les résultats obtenus sont pratiquement les mêmes. L'avantage de W_1 étant de permettre une estimation de la vraisemblance : son analogie avec la fonction W du paragraphe A nous conduit à penser sans pouvoir le démontrer qu'il est quasi gaussien. Nous ne savons pas calculer ΔW_1 mais le fait que l'ambiguïté sur les origines soit presque levée nous a conduit à prendre pour ΔW_1 la même valeur que pour ΔW et donc définir la fonction S comme si les événements n'avaient qu'une seule origine. Les résultats expérimentaux présentés dans le paragraphe A sont ceux trouvés par cette méthode. En définissant la fonction S ainsi nous savons donc que c'est une fonction quasi gaussienne de valeur moyenne nulle (pour N suffisamment grand). Son écart standard est certainement supérieur à 1 mais ce que nous avons dit sur l'ambiguïté des origines permet de penser qu'il en diffère très peu.

D - LES EVENEMENTS AMBIGUS.

Jusqu'ici nous avons supposé que nos événements étaient tous de vrais K_β et que nous avions vu leur origine véritable; malheureusement il n'en est pas ainsi pour deux raisons.

a) Nous ne pouvons pas être sûrs de la nature de certains de nos événements; en effet quelques uns semblent pouvoir avoir d'autres explications : les plus fréquentes sont des désintégrations du type $K \rightarrow \pi \mu \nu$ et $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ pour lequel on peut ne pas reconnaître bien la chaîne de désintégration $\mu \rightarrow e$ ou $\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$.

b) Nous avons défini un volume fiduciaire pour les origines possibles afin d'être sûr d'avoir une probabilité très voisine de 1 de les voir (certaines régions de la chambre où la visibilité était mauvaise ont été ainsi éliminées). Il se peut que certains événements aient leur origine à l'extérieur de ce volume, dans la chambre ou même à l'extérieur en particulier dans la fenêtre d'entrée et dans la paroi de sortie du faisceau de K^+ . En ce cas nous attribuons une mauvaise origine au K^0 si la coupure $X^2 < 13$ ne rejette pas toutes les origines vues.

Pour chaque événement, en vue de traiter correctement ces deux types de bruit de fond, nous devrions en évaluer la probabilité et l'ajouter aux probabilités de chaque origine. Malheureusement il est parfois difficile d'évaluer certains facteurs, par exemple les probabilités respectives pour une trace soit un électron, un μ , un π ou un K ; en outre ceci conduirait à faire une grande quantité de calculs alors que l'analyse (étude cinématique entre autres) des principaux bruits de fond permet de les éliminer comme absolument négligeables dans la plupart des cas.

Nous avons donc adopté une solution qui n'est pas absolument rigoureuse mais dont l'avantage principal est la simplicité :

Abandonnant la méthode du maximum de vraisemblance proprement dite nous nous sommes servis comme estimateur de la fonction $W_1(\lambda)$ (Eq. 26 et 28) pour laquelle chaque origine intervient indépendamment dans la somme avec son poids.

Dans le calcul de ces poids q_j nous utilisons mêmes les origines extérieures au volume où tombant sous d'autres coupures (comme celles sur la direction du K^0) et nous faisons le calcul pour des valeurs particulières des paramètres λ , à savoir dans l'hypothèse $\Delta S = \Delta Q$. Mais ces origines "coupées" ne nous servent que pour déterminer les poids des origines

gardées et n'apportent pas de contribution à la somme permettant de calculer W_1 . En ce qui concerne les événements classés "douteux" c'est-à-dire dont on ne peut décider si ils sont des K_β ou autre chose parce que l'on ne peut évaluer les diverses probabilités, nous avons utilisé un traitement encore plus simpliste : dans W_1 nous leur avons attribué un poids de $1/2$ à priori.

Nous avons 21 événements de cette sorte sur un lot de 315 événements; leur distribution en temps ne montre rien de particulier, ce qui nous conduit à penser que les erreurs que nous pouvons faire, avec une telle méthode, n'auront pas de conséquences supérieures aux erreurs statistiques proprement dites, sur nos résultats.

CHAPITRE IV : LE MONTE-CARLO

INTRODUCTION

Nous voulons traiter dans ce chapitre des méthodes qui nous ont permis de calculer les fonctions déformées $f'(t_m, \lambda)$ définies au chapitre III à partir de la connaissance de $f(t_m, \lambda)$. Ces méthodes nous permettront également de faire un certain nombre de tests comme ceux que nous avons exposé au chapitre II.

Nous avons employé pour faire ces calculs la méthode dite de Monte-Carlo. Cette méthode tire son nom de la ville de Monté Carlo dont la principale industrie est comme il est bien connu l'exploitation de jeux de hasard (roulette, baccara ...), cette méthode consiste en effet à calculer une intégrale par tirage au sort.

Nous allons donc d'abord préciser un peu plus le principe de cette méthode; nous en donnerons une justification et esquisserons quelques principes d'emploi, puis nous exposerons comment nous l'avons appliquée à notre cas particulier.

A - PRINCIPE DE LA METHODE DE MONTE-CARLO.

Considérons une fonction $\phi(r)$, r étant un point d'un espace métrique ξ que nous ne définissons pas plus. Le problème que nous nous posons est de calculer l'intégrale

$$F = \int_{r \in \mathcal{D}} \phi(r) dr \quad (1) \quad \mathcal{D} \text{ étant un domaine de } \xi$$

Nous supposons que nous sommes capables de savoir si un point r est dans $\mathcal{D}$ ou non; nous pouvons alors définir une fonction $g(r)$ telle que:

$$\begin{aligned} g(r) &= 1 && \text{pour } r \in \mathcal{D} \\ g(r) &= 0 && \text{pour } r \notin \mathcal{D} \end{aligned} \quad (2)$$

Supposons de plus que nous connaissons un domaine $\mathcal{B}$ de ξ contenant $\mathcal{D}$ et tel que nous sachions calculer :

$$B = \int_{\mathcal{B}} dr \quad \mathcal{D} \in \mathcal{B} \in \xi \quad (3)$$

Considérons alors une variable aléatoire r prenant ses valeurs dans $\mathcal{B}$ avec une densité de probabilité $\frac{dr}{B}$. Supposons que nous sachions obtenir une suite de valeurs r_i , tirées au sort suivant une telle loi $*$.

Nous choisirons pour estimation de F la variable aléatoire suivante :

$$U_N = \frac{B}{N} \sum_{i=1}^N \phi(r_i) g(r_i) \quad (4)$$

En fait nous ne sommes les valeurs de $\phi(r_i)$ que sur les valeurs de r_i à l'intérieur de $\mathcal{D}$, car à l'extérieur $g(r_i) = 0$.

Nous allons maintenant montrer que :

$$U_N \rightarrow F \quad \text{si} \quad N \rightarrow \infty$$

* par exemple si ξ est l'espace R^n on choisira pour $\mathcal{B}$ un cube, à n dimensions, contenant $\mathcal{D}$; et, par un changement de variable judicieux, on pourra se ramener au problème de tirer au sort de manière uniforme n nombres $r^{(n)}$ compris entre 0 et 1, ce que l'on pourra faire soit à l'aide de tables de nombres aléatoires, soit à l'aide d'un programme spécial existant sur tous les calculateurs.

Pour cela nous allons procéder de manière analogue des calculs du chapitre III en utilisant les propriétés de la fonction caractéristique :

$$\text{soit } \phi(u) = \text{Log} \langle e^{i u U_N} \rangle = N \text{Log} \left[\int_{\mathcal{B}} e^{i u \frac{B}{N}} \phi(r_i) g(r_i) \frac{dr_i}{B} \right] \quad (5)$$

Developpons en série suivant les puissances de u et en utilisant les relations (1) et (3) ainsi que la propriété suivante :

$$(g(r))^n = g(r) \quad (6)$$

$$\phi(u) = N \log \left[1 + i u \frac{F}{N} - \frac{u^2}{2!} \frac{B F_2}{N^2} + \dots + \frac{(i u)^n}{n!} \frac{B^{n-1} F_n}{N^n} \right]$$

$$\text{En posant } F_n = \int_{\mathcal{B}} \phi^n(r) g(r) dr = \int_{\mathcal{D}} \phi^n(r) dr \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \phi(u) = & i u F - \frac{u^2}{2!} \frac{B F_2 - F^2}{N} + \frac{(i u)^3}{3!} \left[\frac{B^2 F_3 - 3 B F_2 F + 2 F^3}{N^2} \right] \\ & + \dots + \frac{(i u)^n}{n!} \frac{K_n}{N^{n-1}} \end{aligned} \quad (8)$$

où K_n ne dépend pas de N .

Ceci montre que lorsque $N \rightarrow \infty$ la loi de probabilité de U_N tend vers une loi gaussienne (les termes d'ordre $u^3 \dots u^n$ tendent vers 0 plus vite que $\frac{1}{N}$). Donc U_N est un estimateur non biaisé de F ; on a :

$$\langle U_N \rangle = F \quad \Delta^2 U_N = \frac{B F_2 - F^2}{N} \quad (9)$$

$$\text{Posons } D = \int_{\mathcal{D}} dr$$

Appliquons l'inégalité de Schwartz

$$\left(\int_{\mathcal{D}} \phi(r) \, dr \right)^2 \leq \int_{\mathcal{D}} \phi^2(r) \, dr \int_{\mathcal{D}} dr$$

$$\text{Soit} \quad F^2 \leq D F_2 \leq B F_2 \quad (10)$$

Ce qui est nécessaire pour que $\Delta^2 U_N > 0$ ces inégalités nous fournissent en outre une limite pour $\Delta^2 U_N$:

$$\Delta^2 U_N \geq \frac{(B - D) F_2}{N}$$

Conséquences

a) Les formules (9) montrent que l'erreur est proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{N}}$, comportement classique pour une erreur statistique.

b) A nombre de tirage fixé, pour avoir l'erreur la plus faible possible, on a intérêt à prendre le domaine $\mathcal{B}$ le plus voisin possible de $\mathcal{D}$. Ceci est normal parce qu'ainsi on s'évite des tirages au sort ne fournissant pas de contribution à U_N parce qu'à l'extérieur de $\mathcal{D}$. Le meilleur est évidemment de prendre $\mathcal{B} \equiv \mathcal{D}$ lorsque c'est possible, c'est-à-dire lorsque $\mathcal{D}$ est suffisamment simple pour que l'on sache tirer au sort des points du domaine suivant la probabilité $\frac{dr}{D}$; en ce cas :

$$\Delta^2 U_N = \frac{D F_2 - F^2}{N} \quad \text{où le numérateur exprime la "régularité" de la fonction } \phi$$

dans le domaine D .

Cas particulier - Calcul d'un volume.

Si $\phi(r) = 1$ le problème est alors de calculer $D = \int_{\mathcal{D}} dr$ avec de plus $F_2 = F_n = D$, l'estimation que l'on fait de D est en ce cas simplement le pourcentage de tirages donnant un point à l'intérieur de $\mathcal{D}$ multiplié par B .

$$\text{on a } \Delta^2 U_N = D \times \frac{(B - D)}{N}$$

Si $\mathcal{D} = \mathcal{B}$, $\Delta U_N = 0$ ce qui est évident puisque d'une part on connaît $D = B$ et que de l'autre les points tirés sont toujours dans $\mathcal{D}$. Ceci vient du fait que l'on n'estime pas en réalité D mais $\frac{D}{B}$: il est nécessaire de connaître B exactement.

Exemple.

Un exemple très simple nous permettra de montrer d'une manière concrète le principe de la méthode de Monte-Carlo :

Soit à calculer la surface limitée par la courbe ci-dessous :



nous inscrivons cette courbe dans un carré dont nous pouvons calculer la surface B puis nous tirons une suite de N points r_i . Pour chacun nous regardons si il se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur de la courbe. La surface est

donnée par : $D \simeq B \times \frac{\text{nombre de points à l'intérieur}}{\text{nombre de points total}}$.

B - ETUDE DE QUELQUES CAS PLUS PARTICULIERS.

Nous avons dans le paragraphe précédent exposé le principe de la méthode de Monté-Carlo mais il est important de souligner que le but de cette méthode est essentiellement pratique : c'est pour des raisons pratiques bien évidentes que l'on ne calcule pas la fonction $\phi(r)$ en tous les points mais seulement en certains et il en résulte une erreur, que nous avons chiffrée, sur le calcul.

Si nous voulons poursuivre nos réflexions sur le sujet il est nécessaire d'introduire des notions telles que le temps, ou le coût du calcul*, et on entre plutôt dans des problèmes de recherche opérationnelle.

Notre intention n'est pas de nous avancer très longtemps sur cette voie mais nous voudrions simplement poser un des problèmes que nous avons rencontré et indiquer une des directions de réflexion qui pourrait permettre de le résoudre.

1) Supposons que notre espace ξ soit le produit de deux sous-espaces $\xi = \xi_1 \times \xi_2$ et $\phi(r) = \phi(r_1, r_2)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ $B = B_1 B_2$

Il se peut que $\phi(r_1, r_2)$ soit une fonction assez longue à calculer et que les parties de calcul relatives à r_1 et à r_2 soient en quelque sorte assez indépendantes de sorte que l'on peut se demander si au lieu de tirer au sort N couples (r_1^i, r_2^i) il ne serait pas plus avantageux de tirer N_1 valeurs de r_1 et N_2 valeurs de r_2 et d'utiliser ainsi $N = N_1 N_2$ valeurs de la fonction $\phi(r_1^i, r_2^i)$.

* A ce sujet il peut être utile de signaler que notre Monté-Carlo a nécessité l'utilisation d'environ 1 h. de calcul sur IBM 7090 sans compter les tâtonnements et mise au point de programmes. Certains physiciens utilisent des calculs de Monté-Carlo, nécessitant plusieurs dizaines d'heures de grands calculateurs.

Si nous prenons une telle politique, nous utiliserons comme estimateur de F :

$$U_{N1,N2} = \frac{B}{N} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \phi(r_1^i, r_2^j) g(r_1^i, r_2^j) \quad (11)$$

le calcul peut se conduire de la même façon qu'en A, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle U_{N1,N2} \rangle &= N \times \frac{B}{N} \int \frac{1}{B} \phi(r_1, r_2) g(r_1, r_2) dr_1 dr_2 = F \\ \langle U_{N1,N2}^2 \rangle &= \sum_{\substack{i_1 i_2 \\ j_1 j_2}} \frac{B^2}{N^2} \int \phi(r_1^{i_1}, r_2^{j_1}) g(r_1^{i_1}, r_2^{j_1}) \phi(r_1^{i_2}, r_2^{j_2}) \\ &\quad g(r_1^{i_2}, r_2^{j_2}) \frac{dr_1^{i_1} dr_2^{j_1} dr_1^{i_2} dr_2^{j_2}}{(B_1 B_2)^2} \end{aligned} \quad (12)$$

Posons $F_2 = \int \phi^2(r_1, r_2) g(r_1, r_2) dr_1 dr_2$

$$A_1 = \int \phi(r_1, r_2) \phi(r_1, r'_2) g(r_1, r_2) g(r_1, r'_2) dr_1 dr_2 dr'_2 \quad (13)$$

$$A_2 = \int \phi(r_1, r_2) \phi(r'_1, r_2) g(r_1, r_2) g(r'_1, r_2) dr_1 dr_2 dr'_1$$

l'inégalité de Schwartz nous donne les relations :

$$F^2 \leq DF_2 \quad F^2 \leq A_2 B_2 \quad F^2 \leq A_1 B_1 \quad (14)$$

Dans (12) nous devons effectuer la somme pour les 4 cas suivants :

$$a) \quad i_1 = i_2 \quad j_1 = j_2 \quad \rightarrow \quad N_1 N_2 F_2 B$$

$$b) \quad i_1 = i_2 \quad j_1 \neq j_2 \quad \rightarrow \quad N_1 N_2 (N_2 - 1) A_1 B_1$$

$$c) \quad i_1 \neq i_2 \quad j_1 = j_2 \quad \rightarrow \quad N_1 N_2 (N_1 - 1) A_2 B_2$$

$$d) \quad i_1 \neq i_2 \quad j_1 \neq j_2 \quad \rightarrow \quad N_1 N_2 (N_1 - 1) (N_2 - 1) F^2$$

Finalement on obtient :

$$\Delta^2 U_{N_1, N_2} = \frac{A_1 B_1 - F^2}{N_1} + \frac{A_2 B_2 - F^2}{N_2} + \frac{F^2 + BF_2 - A_1 B_1 - A_2 B_2}{N}$$

Cas particulier $\phi = 1$ $g(r_1, r_2) = g_1(r_1) g_2(r_2)$

On a alors $D = D_1 D_2$ $F = F_2 = D$ $A_1 = D D_2$ $A_2 = D D_1$

$$\text{d'où } \Delta^2 U = D \left[\frac{(B_1 - D_1) D_2}{N_1} + \frac{(B_2 - D_2) D_1}{N_2} + \frac{(B_1 - D_1) (B_2 - D_2)}{N} \right]$$

La formule (11) appliquée aux erreurs commises séparément sur D_1 (N_1 tirages) et sur D_2 (N_2 tirages) donnerait le même résultat au terme en $1/N$ près qui est d'un ordre de grandeur plus petit et vient du fait que les lois ne sont pas exactement gaussiennes.

Si on cherche le minimum de $\Delta^2 U$ pour $N = N_1 N_2$ constant on trouve :

$$\frac{\frac{N_1}{B_1 - D_1}}{D_1} = \frac{\frac{N_2}{B_2 - D_2}}{D_2}$$

Donc le nombre de tirages doit être proportionnel au rapport entre le nombre de tirages à l'extérieur, soit de $\mathcal{D}_1$ soit de $\mathcal{D}_2$ et à l'intérieur, c'est-à-dire au rapport entre les nombres de mauvais tirages et de bons.

On peut aussi écrire que le temps de calcul nécessaire est :

$T = N_1 T_1 + N_2 T_2 + N T_{1,2} \frac{D}{B}$ où T_1 et T_2 sont les temps de calcul relatif à r_1 et r_2 , et $T_{1,2}$ le temps de calcul nécessitant la connaissance de r_1 et r_2 . On cherchera alors à minimiser $\Delta^2 U$ à temps de calcul T constant et on pourra comparer avec la méthode exposée en A.

2) On peut aussi pour chaque valeur de r_1 tirer N_2 valeurs de r_2 mais sans les réutiliser pour d'autres valeurs de r_1 (ceci peut être nécessaire si la manière de tirer r_2 dépend de la valeur de r_1) dans ce cas les calculs sont les mêmes que pour 1) à l'exception du calcul $\Delta^2 U_{N1,N2}$ ou on ne doit pas utiliser le cas c); on obtient :

$$\Delta^2 U_{N1,N2} = \frac{A_1 B_1 - F^2}{N_1} + \frac{F_2 B - A_1 B_1}{N}$$

Cas particulier où $g(r_1, r_2) = g_1(r_1) g_2(r_2)$

Le temps de calcul moyen est alors :

$$T = N_1 T_1 + N_2 T_2 \frac{D_1}{B_1} + N T_{1,2} \frac{D}{B}$$

et on peut aussi rechercher l'optimum de $\Delta^2 U$

Pour conclure cette brève étude nous avouerons tout de suite que nous n'avons pas fait appel à ce genre de notions pour déterminer la meilleure manière de faire nos calculs de Monté-Carlo.

Il se trouve que nous avons préféré faire le calcul en plusieurs étapes successives pour pouvoir contrôler l'efficacité des coupures faites (points en dehors de $\mathcal{D}$); des considérations de volume d'informations à transmettre d'une étape de calcul à une autre par cartes perforées nous ont imposé certains choix peut-être en contradiction avec la recherche d'un coût de calcul minimum. Il est d'ailleurs extrêmement probable que l'étude sérieuse de la meilleure méthode de calcul aurait nécessité plus de temps de calcul que le gain réalisé par son emploi de préférence à la méthode plutôt intuitive qui nous a guidé.

De ce qui précède nous retiendrons seulement le sentiment que plus le tirage au sort sur une variable est "inefficace" c'est-à-dire plus on a de chance de trouver par ce tirage un point à l'extérieur de $\mathcal{D}$, plus on doit effectuer de tirages au sort sur cette variable comparativement aux autres.

D'autre part il est certainement avantageux de tirer au sort d'abord les variables dont la connaissance permet le plus de dire que le point est à l'extérieur de $\mathcal{D}$ car il est alors inutile de tirer au sort les autres variables et on gagne du temps de calcul.

Enfin la méthode de Monté Carlo étant essentiellement une méthode "bête" on doit s'appliquer à effectuer mathématiquement les intégrations sur les variables pour lequel c'est possible; le gain en temps et en précision peut être très appréciable.

C - CALCUL DES COURBES "PSEUDO THEORIQUE" POUR LE MODE K_β

Connaissant la loi de désintégration $f(t)$ théorique des K_β nous voulons savoir quelles sont les corrections à introduire pour tenir compte des déformations produites par notre méthode d'analyse. Nous devons examiner deux types d'effets : les uns dus au mode d'attribution du temps de vie à partir d'un moment p_f fourni par le fit cinématique et non du moment vrai p_v , les autres dus au mode d'observation des K_β (on exige que la configuration observée, réponde à un certain nombre de critères, page suivante).

Méthode générale de résolution.

Se donnant une certaine loi théorique de désintégration des K_β $f(t)$ nous voulons reproduire, par le calcul, le plus parfaitement possible l'expérience c'est-à-dire la désintégration des K_β dans la chambre et leur observation pour en déduire la loi pseudo-théorique $F(t)$ correspondante.

Comme nous l'avons dit au chapitre I , toute l'information sur la production des K^0 dans la chambre nous est fournie par un lot de N désintégrations $K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$. Pour chaque désintégration nous aurons besoin des quantités suivantes :

q le poids de la désintégration

$x \ y \ z$ coordonnées dans la chambre du point où le K^+ interagit pour donner un K^0

$\theta_{K^+} \ \phi_{K^+}$ deux angles définissant la direction du K^+ incident

$p_v \ \theta_K \ \phi_K$ le moment du K^0 et deux angles le définissant en direction.

Nous considérerons que nous connaissons ces quantités sans erreur.

Pour calculer la loi $F(t)$ nous procédons de la manière suivante :

Considérons successivement chaque source de K^0 (lot $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$). Une telle source émet un K_β avec un moment $\vec{p}_\nu$, nous tirons au sort la désintégration dans le centre de masse avec une distribution uniforme $^{en} / p_e^* p_\nu^*$ (la figure 18 montre les notations utilisées), une distribution isotrope de l'électron autour du K^0 et uniforme du neutrino autour de l'électron (l'angle électron-neutrino est fixé par la donnée de $p_e^* p_\nu^*$). Revenant dans le système du laboratoire nous en déduisons les moments $\vec{p}_e$ et $\vec{p}_\pi$ de l'électron et du π .

Nous simulons ensuite de manière simplifiée le processus de mesure de l'événement en déformant les moments de l'électron et du π suivant une loi gaussienne d'écart proportionnel à une fraction du moment (nous avons pris 35% d'erreur relative pour l'électron et 20% pour le π ce qui représente les erreurs moyennes pour notre lot de K_β cf figure (8) et (9); puis, afin de rendre compte des déformations dues à la cinématique, nous effectuons, sur les événements ainsi obtenus, exactement le même "fit" que sur les événements expérimentaux $*$. Nous en déduisons en particulier une estimation du moment du K_β soit p_f qui va nous servir à connaître la relation temps mesuré, longueur de la ligne de vol.

Nous devons maintenant voir si la configuration aurait été observée et retenue expérimentalement. Pour cela elle doit satisfaire aux mêmes critères de sélection que les événements expérimentaux :

- le vertex ou point de désintégration doit être dans un volume fiduciaire donné.

* Vu la dimension des erreurs angulaires expérimentales comparées aux erreurs sur le moment (cf figures 2 à 7) nous n'avons pas cru devoir déformer les angles de nos événements générés.

- le π doit, dans un volume fiduciaire donné, ne pas présenter d'interaction sur les cinq premiers centimètres de son parcours (nous appelons interaction, la disparition brutale de la trace ou une interaction avec plusieurs particules sortantes ou bien un coude d'angle supérieur à 20° en projection sur la glace avant).

- l'électron doit spiraliser dans un volume fiduciaire donné (nous disons qu'un électron spiralise si, en projection sur la glace avant, il existe un point pour lequel la tangente à la trace fait un angle supérieur à 90° avec le rayon vecteur liant ce point au premier point de la trace, cf. Figure 19).

Nous remarquons tout de suite que ces critères dépendent de la position du point de désintégration du K_β le long de la ligne de vol du K^0 . Soit donc l l'abscisse de ce point. Nous devons voir pour quelles valeurs de l le K_β peut-il être observable, c'est-à-dire définir une fonction $g(l)$ tel que $g(l) = 1$ si le K_β est observable, 0 sinon.

Calcul de $g(l)$ fonction d'observation.

Nous allons montrer que du fait de la forme convexe de nos volumes fiduciaires la fonction g a une forme particulière très simple : $g(l) = 1$ pour $l_{\min} < l < l_{\max}$, $g(l) = 0$ ailleurs. Le problème étant alors de calculer $l_{\min}$ et $l_{\max}$.

Cette propriété vient du fait que toute demi-droite coupe le volume fiduciaire (nous avons choisi des parallélépipèdes rectangles) en deux points, au plus. On peut donc définir sur une demi-droite deux abscisses $0 \leq x_{\min} < x_{\max}$ telles que tous points d'abscisse $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ soit à l'intérieur du volume.

La figure (19) montre une désintégration de K_{β} produite au temps $t = 0$. L'ensemble des points qui doivent être à l'intérieur du volume fiduciaire est représenté en trait fort. D'un de ces points, M par exemple traçons une demi-droite parallèle à la ligne de vol soit $x_{\min}^M$ et $x_{\max}^M$ les bornes d'une telle demi-droite pour le volume fiduciaire correspondant, les bornes cherchées $l_{\min}$ et $l_{\max}$ seront données par :

$$l_{\min} = \sup x_{\min}^M \quad \text{et} \quad l_{\max} = \inf x_{\max}^M \quad \text{pour tous les points } M.$$

Pour le π nous avons remplacé la trajectoire réelle par un segment de droite parallèle à $\vec{p}_{\pi}$ de 5cm (longueur visible sans interaction nécessaire) et nous n'avons exigé que la présence dans le volume fiduciaire des deux extrémités du segment de droite. Eut égard aux dimensions de la chambre une telle approximation est parfaitement justifiée.

Pour l'électron la situation se présente de façon beaucoup plus compliquée. En effet d'une part la longueur de trajectoire avant spiralisation peut être très grande et nous ne pouvons donc plus faire d'approximation; d'autre part la trajectoire est aléatoire du fait du phénomène d'émission de gamm de Bremsstrahlung.

Nous avons donc reconstruit la trajectoire de l'électron de la manière suivante : nous assimilons la trajectoire à une suite d'arcs de cercles de longueur λ tangents les uns aux autres. Pour chaque arc $\overline{M_i M_{i+1}}$ le rayon de courbure en projection est une fonction de l'énergie E_i de l'électron au point M_i . L'énergie de l'électron au point M_{i+1} se déduisant de l'énergie de l'électron au point E_i , en appliquant la perte d'énergie par ionisation sur la longueur λ et en tirant au sort la perte d'énergie par Bremsstrahlung le long de l'arc $\overline{M_i M_{i+1}}$ suivant les lois de l'électrodynamique. Pour chaque point M_i nous calculons les bornes $x_{\min}^{M_i}$ et $x_{\max}^{M_i}$ comme il a été exposé plus haut. Le calcul se

termine lorsque la condition de spiratisation (définie plus haut) est satisfaite ou lorsque l'on trouve $\ell_{\min} \geq \ell_{\max}$ c'est-à-dire lorsque l'électron ne peut spiratiser pour aucune position du vertex le long de la ligne de vol.

Calcul de la fonction déformée.

p_v étant le moment vrai du K^0 , p_f le moment fitté. Soit t_v et t_f le temps vrai et le temps fitté. Nous avons les relations suivantes :

$$p_v t_v = p_f t_f = M_k \ell$$

$$p_v dt_v = p_f dt_f = M_k d\ell$$

la fonction déformée sera telle que :

$$F(t_f) dt_f = \sum q f(t_v) dt_u \times g(\ell) \times e^{-5/L_\pi}$$

la somme étant étendue à tous les K^0 .

L_π est la longueur d'interaction des π , elle a été calculée à partir des π de désintégration de notre lot de $K_0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ (Ref. 32)

e^{-5/L_π} est donc la probabilité de ne pas avoir d'interaction dans les cinq premiers centimètres de traces.

d'où :

$$F(t_f) = \sum_{\substack{N \\ K_0 \\ i=1}} q_i f\left(\frac{p_f}{p_v} t_f\right) \frac{p_f}{p_v} g\left(\frac{p_f t_f}{M_k}\right) e^{-5/L_\pi} \quad (15)$$

On peut calculer aussi le temps observable défini par :

$$T = \int F(t_f) dt_f$$

on a

$$T = \sum_{i=1}^N q_i e^{-5/L\pi} \int_{\frac{MK}{p_v} \ell_{\min}}^{\frac{MK}{p_v} \ell_{\max}} f(t) dt \quad (16)$$

Remarques.

1) La transformation 15 qui permet de passer de f à F est une transformation linéaire. f étant une fonction linéaire (cf chapitre 1 iv équation 23, page 72) des quatre fonctions $f_1 = e^{-\ell/L - t/\tau_S}$, $f_2 = e^{-\ell/L - t/\tau_L}$, $f_3 = e^{-\ell/L - \frac{t}{2}(\ell/\tau_S + 1/\tau_L)} \cos \Delta m t$ et $f_4 = e^{-\ell/L - t/L(1/\tau_S + 1/\tau_L)} \sin \Delta m t$. Il suffit pour connaître F pour toutes les valeurs des paramètres de calculer les transformées de ces quatre fonctions, soit $F_1(t_f)$, $F_2(t_f)$, $F_3(t_f)$ et $F_4(t_f)$, les figures 20 à 23 montrent ces quatre fonctions calculées point par point à partir de la formule 15.

2) Il eut été possible dans le calcul précédent, de tirer au sort en chaque point de la trajectoire du π le fait que celui-ci interagisse ou non, comme nous l'avons fait pour la perte d'énergie par Bremsstrahlung de l'électron. En fait, comme nous savons dans le cas d'une interaction intégrer la loi de probabilité suivant les principes exposés dans le paragraphe B, nous avons préféré faire le calcul d'intégration, ce qui fournit le terme $e^{-S/L\pi}$.

Pour la même raison la formule 16 est intéressante car nous savons effectuer l'intégration pour les fonctions f_1 , f_2 , f_3 et f_4 .

Cette fonction pourrait être calculée par une formule analogue à 19. Mais outre que le calcul serait long et nécessiterait la constitution d'un gros support matériel pour cette information, il semble assez difficile de propager dans le calcul du maximum de vraisemblance l'effet d'une telle fonction pour calculer les erreurs sur les paramètres que nous mesurons.

La régularité des courbes obtenues (cf. figures 20 à 23) ainsi que le nombre de tirages au sort nous conduit à négliger ce type d'effet c'est-à-dire à supposer que $C(t_1, t_2) \approx 1$.

Nous n'avons donc tenu compte des erreurs dues au Monté-Carlo que pour la détermination des taux de désintégrations et non pas pour la détermination des autres paramètres.

CHAPITRE V : RESULTATS EXPERIMENTAUX

A - LA VIOLATION DE CP DANS LES K_B

L'analyse de cette expérience (exposée en Réf. 46) en supposant CP conservé avait fourni les résultats suivants :

$$\Gamma_1 = 14,3 \pm 6,4 \quad 10^6/\text{sec}$$

$$\Gamma_2 = 8,55 \pm 0,9 \quad 10^6/\text{sec}$$

$$\Delta m = 0,53 \begin{matrix} + 0,10 \\ - 0,20 \end{matrix} \quad \frac{\hbar}{c^2 \tau_S}$$

La règle $\Delta S = \Delta Q$ prédit $\Gamma_1 = \Gamma_2$ et la règle $\Delta I = 1/2$ leptonique donne une valeur déduite du taux correspondant des K^+ de :

$$\Gamma_2^{\text{th}} = 7,68 \pm 0,49 \quad 10^6/\text{sec}$$

L'expérience semblait donc assez en accord avec ces règles de sélection. Cependant lorsque l'on introduit une possible violation de CP l'accord observé ne permet pas de conclure à la non violation de CP dans le mode de désintégration considéré car on ajoute un paramètre supplémentaire dans la loi de désintégration : nous devons de plus noter que la vraisemblance calculée dans l'hypothèse CP conservé se trouvait à 1,5

écart standard de la valeur attendue (cf chapitre III) alors qu'en introduisant une possible violation de CP nous trouvons maintenant une vraisemblance à 0,1 écart standard de la valeur attendue.

Actuellement la meilleure valeur de la différence de masse est (Réf. 38) $\Delta m = 0,44 \pm 0,06$ en bon accord avec la valeur que nous avons trouvée.

Pour avoir une meilleure détermination de la violation de CP dans notre expérience nous avons donc décidé de prendre cette valeur de la différence de masse comme un paramètre connu.

Nous avons donc choisi comme fonction de probabilité pour notre maximum de vraisemblance la loi donnée par la formule :

$$N^{\pm}(t) = \frac{|f|^2 + |g|^2}{2} \left\{ \left[1 + \alpha + a(1 + \alpha \pm \gamma - \beta) \right] F_1(t) + \left[1 - \alpha - a(1 - \alpha \pm \gamma + \beta) \right] F_2(t) + 2 \left[\pm \gamma - a(\alpha + \beta) \right] F_3(t) + 2 \left[\beta + a(1 \pm \gamma) \right] F_4(t) \right\} \quad (1)$$

où $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$, $F_4(t)$ sont les 4 fonctions déformées déduites des 4 fonctions théoriques $e^{-\lambda/L - t/\tau_S}$, $e^{-\lambda/L - t/\tau_L}$, $e^{-\lambda/L - t/2(1/\tau_S + 1/\tau_L)} \cos \Delta m t$ et $e^{-\lambda/L - t/2(1/\tau_S + 1/\tau_L)} \sin \Delta m t$

(cf. Figures 20 à 23).

$$a = \frac{p_k \tau_S}{M_k} N \frac{\sigma - \bar{\sigma}}{2} \sim \frac{p_k}{M_k} \times 6 \times 10^{-3}$$

est calculé à partir de la composition connue du liquide de la chambre et des valeurs des sections efficaces données dans la littérature (réf.44). La correction introduite par ce terme est en réalité très faible et aurait pu être négligée.

Définitions des grandeurs physiquement intéressantes.

Nous définirons les grandeurs suivantes qui présentent un intérêt vis-à-vis des différentes règles de sélections :

$$x e^{i\phi} = \frac{g}{f} = \frac{\alpha + i\beta}{1 + \gamma} \quad (2) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (3)$$

$$\Gamma^S = (|f|^2 + |g|^2) (1 + \alpha) \quad (4)$$

$$\Gamma^L = (|f|^2 + |g|^2) (1 + \alpha) \quad (5) \quad (\text{cf. chapitre 1 IV p. 66})$$

$$y_\beta = (|f|^2 + |g|^2) \beta \quad (6)$$

x est une mesure de la validité de la règle $\Delta S = \Delta Q$

ϕ (ainsi que y_β) est une mesure de la violation de CP dans les K_β

Γ_S et Γ_L comparés à Γ_+ (cf. équation 20 chapitre 1 IV p. 68) mesurent la validité de la règle $\Delta I = 1/2$

y_β mesure l'importance de la contribution de la violation de CP dans les K_β à la violation générale de CP dans les K^0 (définie par ϵ).

Résultats

Les figures 24, 25 et 26 montrent les histogrammes expérimentaux en fonction du temps des événements obtenus.

Les figures 27 et 28 montrent la variation de la fonction de vraisemblance W (cf. chapitre III p. 99 eq. 6) avec $x \cos \phi$ et $x \sin \phi$.

La figure 29 montre dans le plan complexe $x \cos \phi$, $x \sin \phi$ le point rendant W maximum, ainsi que les courbes de niveau $W = W_{\max} - 0,5$ et $W = W_{\max} - 1,4$ qui permettent de calculer les erreurs.

Les résultats que l'on obtient sont les suivants *

$x \cos \phi = 0,09 \pm 0,09$	$\left. \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 7,68 \pm 0,49 \\ 0 \end{array} \right\} \text{valeurs prédites par } \Delta I = 1/2$
$x \sin \phi = 0,2 \pm 0,08$	
$\Gamma_{\beta}^L = 7,56 \pm 0,85 \quad 10^6/\text{sec}$	
$y_{\beta} = 3,5 \pm 1,5 \quad 10^6/\text{sec}$	

* *

Les erreurs sont les erreurs données par le maximum de vraisemblance pour Γ_{β}^L et y_{β} on a tenu compte également des erreurs dues à la méthode de Monte-Carlo et aux erreurs statistiques sur le nombre d'événements expérimentaux.

* Seuls les événements à temps de vie compris entre $0,1\tau_S$ et $15\tau_S$ ont été utilisés.

* * En réalité on ne mesure que y_{β} x signe Δm , nous avons ici supposé que $\Delta m > 0$.

Discussion des résultats.

Ces résultats montrent que la violation de la règle $\Delta S = \Delta Q$ ne peut être très importante. Si l'amplitude $\Delta S = - \Delta Q$ existe effectivement elle est alors en grande partie imaginaire donc violant CP.

Enfin la règle $\Delta I = 1/2$ ^{leptonique} est bien vérifiée pour autant que la règle $\Delta S = \Delta Q$ le soit.

Discussion des hypothèses.

L'équation (1) que nous avons utilisée n'est en réalité strictement vraie que pour une configuration p_e^*, p_v^* dans le centre de masse fixé. En effet comme nous l'avons exposé (chapitre 1 IV p. 70) la désintégration dépend d'un facteur de forme qui peut être différent pour les amplitudes $\Delta S = \Delta Q$ et $\Delta S = - \Delta Q$. Il se peut même que l'interaction pour $\Delta S = - \Delta Q$ ne soit pas du type V - A mais contienne des termes du type S ou T, l'expérience (réf.35) n'ayant été faite que sur des K_2^0 .

N'ayant pas assez d'événements pour tester (1) en fonction de la configuration nous devrions intégrer sur la configuration. On obtient alors une équation semblable à (1) mais pour laquelle la relation (3) est remplacée par la relation beaucoup moins stricte :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \leq 1$$

En fait en regardant l'équation (1) on peut s'apercevoir que l'expérience consiste en réalité à regarder d'une part la différence entre le nombre d'événements à long temps de vie et à court temps de vie c'est-à-dire à mesurer $\frac{\Gamma_S}{\Gamma_L}$ ou α et de l'autre à regarder la différence entre les distributions d'événements à électron positif et à électron négatif c'est-à-dire

à mesurer γ . Le terme dont dépend β étant $e^{-t/L(1/\tau_S + 1/\tau_L)} \sin \Delta m t$ c'est un terme qui est nul aussi bien pour $t = 0$ que pour t grand il modifie seulement la forme de la distribution aux temps intermédiaires et l'expérience n'est en réalité pas très sensible à β c'est pourquoi la relation $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ est très importante pour la détermination de la violation de CP, nous n'avons donc pas voulu la supprimer et pour examiner la dépendance de la configuration nous avons fait les deux tests suivants:

a) Influence de la configuration sur x et ϕ .

Nous avons séparé nos événements suivant les valeurs de $q^2 = m_K^2 + m_\pi^2 - 2 \vec{p}_K \vec{p}_\pi$ transfert du K ou π en quatre lots d'égale importance.

Nous avons ensuite appliqué à chacun de ces lots la méthode du maximum de vraisemblance pour déterminer x et ϕ à l'aide de la loi (1).

Il est nécessaire de supposer pour cela que les fonctions $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$ soient pour une valeur de t donnée dans un rapport ne dépendant pas de q^2 ; supposition raisonnable car ces fonctions sont, aux déformations dues aux erreurs de mesure près, le produit d'une fonction de détection qui peut dépendre de la configuration par des fonctions n'en dépendant pas (cf. chapitre III p.107)

Le tableau suivant montre les résultats obtenus.

$\frac{q^2}{m_\pi^2}$	$x \cos \phi$	$x \sin \phi$
0 - 0,6	$-0,25 \pm 0,32$ $-0,6$	$0,42 \pm 0,34$ $-0,8$
0,6 - 1,3	$0,10 \pm 0,15$ $-0,17$	$0,13 \pm 0,21$ $-0,17$
1,3 - 2,6	$0,15 \pm 0,14$ $-0,18$	$0,18 \pm 0,22$ $-0,18$
2,6 - 6,5	$0 \pm 0,15$ $-0,2$	$-0,4 \pm 0,7$ $-0,1$

Les valeurs de $x \cos \phi$ et de $x \sin \phi$ dans les différentes bandes d'énergie du π sont tout à fait compatibles en elles.

b) Etude du facteur de forme des K^0 .

Notre méthode de Monte-Carlo nous permettant de connaître la probabilité de détection pour une configuration particulière dans le centre de masse ainsi que les déformations dues aux erreurs de mesure, nous sommes capables de déterminer la variation du facteur de forme en fonction de l'énergie à l'aide de la paramétrisation habituelle suivante :

$$f = f_0 \left(1 + \lambda \frac{q^2}{m_\pi^2} \right)$$

Nous avons employé une méthode dérivée de la méthode du maximum de vraisemblance dont le détail est donné en Annexe II

La figure 30 montre la variation de la vraisemblance en fonction de λ .

La figure 31 montre la même variation mais pour les événements générés par le Monte-Carlo et pour plusieurs valeurs du paramètre λ supposées vraies. On voit que la méthode employée n'est pas biaisée pour ces événements en ce sens que l'on trouve pour valeur λ optimum la valeur donnée à priori (c'est d'ailleurs une des conditions que nous nous sommes imposés dans l'analyse exposée en Annexe II).

Le résultat est donc $\lambda = 0,08 \begin{smallmatrix} + 0,10 \\ - 0,08 \end{smallmatrix}$ tout à fait en accord avec les derniers résultats publiés (réf. 26).

Ceci montre que la dépendance en énergie des facteurs de forme est faible. Il est à remarquer que notre méthode utilise contrairement aux autres des désintégrations aussi bien $K_S \rightarrow \pi e \nu$ que $K_L \rightarrow \pi e \nu$. Le fait que l'on trouve un résultat en accord avec ceux donnés par les autres méthodes conduit à penser que l'amplitude $\Delta S = -\Delta Q$ si elle existe ne peut se conduire très différemment de l'amplitude $\Delta S = \Delta Q$ en fonction de q^2 .

B - LA VIOLATION DE CP DANS LE $\pi^+ \pi^- \pi^0$.

L'analyse de ce mode de désintégration (exposé en réf.32), en supposant CP conservé, nous avait fourni les résultats suivants :

- Pour un total de 136 événements $\pi^+ \pi^- \pi^0$, nous trouvions

$$\Gamma(K_2^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0) = 2.62 \begin{matrix} + 0.28 \\ - 0.27 \end{matrix} \quad 10^6/\text{sec}$$

- Pour le mode $3\pi^0$ nous avons obtenu avec 54 événements

$$\Gamma(K_2^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^0) = 5.22 \begin{matrix} + 1.03 \\ - 0.84 \end{matrix} \quad 10^6/\text{sec}$$

Ces deux résultats combinés avec les valeurs des taux de désintégration du K^+ donnait pour le rapport des amplitudes 3/2 et 1/2 (en supposant nulles les amplitudes de ΔI plus élevées).

$$\text{Re } \frac{a_{3/2}}{a_{1/2}} = (-1 \pm 3) \times 10^{-2}$$

Ce qui montre le bon accord de notre expérience avec la règle $\Delta I = 1/2$. non leptonique qui permet de déduire les taux du K^0 de ceux du K^+ :

$$\Gamma^{\text{th}}(K_2^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0) = (2,78 \pm 0,16) 10^6/\text{sec}$$

$$\Gamma^{\text{th}}(K_2^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^0) = (4,83 \pm 0,16) 10^6/\text{sec}$$

La figure 32 montre l'histogramme des temps de vie des événements et permet de voir le bon accord de l'expérience avec une distribution théorique ne mettant en jeu qu'une amplitude ne violant pas CP.

Comme nous l'avons exposé (ch. I-IV 1ère partie) les conditions difficiles de l'expérience interdisent de mesurer un nombre trop grand de paramètres; nous avons donc décidé de réduire ce nombre en faisant certaines hypothèses. Nous allons donc maintenant présenter les résultats obtenus suivant ces hypothèses.

1) Hypothèse de l'état final $I = 1$ symétrique.

On a alors (voir équation 1 IV 12) deux paramètres qui mesurent la violation de CP et $\Gamma(K_L \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0)$.

La figure 33 montre la courbe de vraisemblance obtenue :

$$\phi = 48^\circ \begin{matrix} + 9^\circ \\ - 96^\circ \end{matrix} \quad \text{à 90\% de confiance} \quad \text{soit} \quad \frac{\Gamma^S}{\Gamma_L} = 1,2 \pm 1,2$$

Nous pouvons donner également la valeur correspondante de :

$$y_{\pi^+ \pi^- \pi^0} = \Gamma(K_L \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0) \operatorname{tg} \phi :$$

$$| y_{\pi^+ \pi^- \pi^0} | < 4 \cdot 10^6 / \text{sec}$$

2) Hypothèse de la règle de sélection $\Delta I = 1/2$

On a alors (voir équation 1 IV 15) un seul paramètre ϕ .

La figure 34 montre la courbe de vraisemblance obtenue :

$$\phi = -19^\circ \begin{matrix} + 41^\circ \\ - 15^\circ \end{matrix} \quad \text{à 90\% de confiance} \quad \text{soit} \quad \frac{\Gamma^S}{\Gamma_L} = 0,11 \begin{matrix} + 0,34 \\ - 0,11 \end{matrix}$$

On peut alors calculer le terme y violant CP à partir des taux de désintégrations du K^+ et pour l'ensemble des modes 3π ; d'après (1 IV - 15) il vient :

$$y_{3\pi} = \Gamma_{+00} \times (1,97 + 3,50) \sin \phi \cos \phi$$

la valeur de Γ_{+00} est actuellement (réf. 26)

$$\Gamma_{+00} = (1,35 \pm 0,05) \quad 10^6/\text{sec}$$

Ce qui fournit comme limite à 90% de confiance :

$y_{3\pi} = -1,68 \begin{matrix} + 3,58 \\ - 0,85 \end{matrix} \quad 10^6/\text{sec}$

C - CONSEQUENCES SUR LA VIOLATION DE CP DANS LE SYSTEME $K^0 \bar{K}^0$.

L'étude que nous avons présentée montre que :

$$y_{\beta} \tau_S = 4,1 \pm 1,75 \quad 10^{-4}$$

D'autre part des études semblables (réf. 45) faites sans connaître la nature du lepton ont donné des résultats similaires; nous pouvons donc supposer que la violation éventuelle de $\Delta S = - \Delta Q$, pour les désintégrations muoniques, est la même que pour les désintégrations électroniques, ce qui donne donc :

$$y_{\ell} \tau_S = 6,9 \pm 3,0 \quad 10^{-4} \quad \text{à comparer avec (Réf.27,29)} \quad \begin{matrix} |\eta_{+-}| = 1,98 \pm 0,06 \quad 10^{-3} \\ |\eta_{00}| = 4,9 \pm 0,5 \quad 10^{-3} \end{matrix}$$

Ce résultat montre que la seule contribution de y_{ℓ} ne peut expliquer les valeurs de η_{+-} et η_{00} trouvées. On ne peut rejeter cependant complètement un modèle avec une contribution importante d'amplitude $\Delta S = - \Delta Q$ violant CP

car des diagrammes du type $K^0 \rightarrow \pi$ e $\nu \rightarrow \overline{K}^0$ peuvent donner des contributions au terme m_1 de la matrice de masse.

La valeur que nous avons trouvée pour $y_{3\pi}$ montre que :

$$y_{3\pi} \tau_S = - 1,95 \pm 1,1 \quad 10^{-4}$$

soit :

$$(y_\ell + y_{3\pi}) \tau_S = 5 \pm 3,3 \quad 10^{-3}$$

Ceci est encore trop faible pour expliquer l'effet observé. Quoiqu'il en soit cette expérience montre que $(y_\ell + y_{3\pi}) \tau_S$ pourrait être de l'ordre de grandeur de η_{+-} donc de ϵ et cela peut être un élément non négligeable de la détermination des divers paramètres de la figure 35.

Δm semblant être négatif le résultat que nous avons obtenu doit être changé de signe, soit :

$$(y_\ell + y_{3\pi}) \tau_S = - (0,5 \pm 0,33) \quad 10^{-3}$$

Ce résultat semble favoriser la solution N° 3 (1ère partie chapitre IV p. 61) qui est aussi favorisée par le fait que les déphasages δ_2 et δ_0 doivent être tels que $\delta_0 > \delta_2$ (réf. 31). Rappelons que cette solution donnait:

$$(y_\ell + y_{3\pi}) \tau_S = - 0,77 \quad 10^{-3}$$

c'est cette solution que nous avons représentée sur la figure 35

CONCLUSION

Dans cette étude l'observation en fonction du temps des désintégrations en trois corps des mésons K^0 a permis de montrer que ces divers types de désintégrations peuvent être bien expliqués par les règles de sélection suivantes : $\Delta S = \Delta Q$, $\Delta I = 1/2$ leptonique et non leptonique sans la nécessité d'introduire une violation de CP. La violation de CP expérimentalement observée dans les modes $K_0 \rightarrow 2\pi$ ne perturbe pas un tel schéma dans la limite des erreurs expérimentales. D'autre part notre étude a montré que cet effet de violation de CP ne peut être expliqué simplement par une violation de CP dans les désintégrations en trois corps.

Les résultats que nous avons obtenus :

$$Y_8 = 3,5 \pm 1,5 \cdot 10^6/\text{sec} \qquad Y_{3\pi} = -1,68^{+3,58}_{-0,85} \cdot 10^6/\text{sec}$$

ne peuvent cependant pas exclure la possibilité d'une petite violation de CP dans ces modes de désintégration. En ce cas un tel résultat peut permettre de préciser nos connaissances sur la composition exacte des mésons K_S^0 et K_L^0 .

Nous avons de plus mesuré la variation du facteur de forme de la désintégration $K^0 \rightarrow \pi$ e ν en fonction du moment de transfert; le résultat est :

$$\lambda = 0,08^{+0,10}_{-0,08}$$

Ce résultat est en accord avec les résultats déjà publiés; il s'en distingue par le fait que la mesure a été faite sur des K^0 et non sur des K_L^0 comme dans les autres expériences.

TABEAU I : LES AMPLITUDES DE DESINTEGRATION DU K^0 ET DU $\overline{K}^0$

$K^0 \rightarrow 2\pi$	A_0	$I = 0$	$\overline{K}^0 \rightarrow 2\pi$	A_0	$I = 0$
	A_2	$I = 2$		A_2^*	$I = 2$
$K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$\sqrt{\frac{2}{3}} A_0 + \sqrt{\frac{1}{3}} A_2 F$		$\overline{K}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$\sqrt{\frac{2}{3}} A_0 + \sqrt{\frac{1}{3}} A_2^* F$	
$K^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$	$-\sqrt{\frac{1}{3}} A_0 + \sqrt{\frac{2}{3}} A_2 F$		$\overline{K}^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$	$-\sqrt{\frac{1}{3}} A_0 + \sqrt{\frac{2}{3}} A_2^* F$	

$F = e^{i(\delta_2 - \delta_0)}$ déphasage des interactions dans l'état final $I=2$ et $I=1$

$K^0 \rightarrow 3\pi$	$A_{I\ell} F_{I\ell}$	$\overline{K}^0 \rightarrow 3\pi$	$A_{I\ell}^* (-1)^{\ell+1} F_{I\ell}$
------------------------	-----------------------	-----------------------------------	---------------------------------------

$$F_{I\ell} = e^{i\delta_{I\ell}}$$

$K^0 \rightarrow \pi^+ \ell^- \overline{\nu}$	g^*	$\overline{K}^0 \rightarrow \pi^- \ell^+ \nu$	g
$K^0 \rightarrow \pi^- \ell^+ \nu$	f	$\overline{K}^0 \rightarrow \pi^+ \ell^- \overline{\nu}$	f^*

TABLEAU II : LES AMPLITUDES DE DESINTEGRATION DU K_1^0 ET DU K_2^0

$K_1^0 \rightarrow 2\pi$	$\sqrt{2} A_0$	$I = 0$	$K_2^0 \rightarrow 2\pi$	0	$I = 0$
	$\frac{\sqrt{2}}{2} (A_2 + A_2^*)$	$I = 2$		$\frac{\sqrt{2}}{2} (A_2 - A_2^*)$	$I = 2$
$K_1^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$\frac{2}{\sqrt{3}} A_0 + \frac{1}{\sqrt{6}} (A_2 + A_2^*)$	F	$K_2^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$\frac{1}{\sqrt{6}} (A_2 - A_2^*)$	F
	$-\sqrt{\frac{2}{3}} A_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} (A_2 + A_2^*)$	F		$\frac{1}{\sqrt{3}} (A_2 - A_2^*)$	F
$K_1^0 \rightarrow 3\pi$	$\frac{A_{I\ell} + A_{I\ell}^* (-1)^{\ell+1}}{\sqrt{2}}$	$F_{I,\ell}$	$K_2^0 \rightarrow 3\pi$	$\frac{A_{I\ell} - A_{I\ell}^* (-1)^{\ell+1}}{\sqrt{2}}$	$F_{I,\ell}$
$K_1^0 \rightarrow \pi^+ \ell^- \bar{\nu}$	$\frac{g^* + f^*}{\sqrt{2}}$		$K_2^0 \rightarrow \pi^+ \ell^- \bar{\nu}$	$\frac{g^* - f^*}{\sqrt{2}}$	
$K_1^0 \rightarrow \pi^- \ell^+ \nu$	$\frac{f + g}{\sqrt{2}}$		$K_2^0 \rightarrow \pi^- \ell^+ \nu$	$\frac{f - g}{\sqrt{2}}$	

TABLEAU III : MATRICE DE DESINTEGRATION DANS LE SYSTEME $K^0 \bar{K}^0$

Mode 2π .

$$\Gamma_0 = \begin{vmatrix} A_0^2 & A_0^2 \\ A_0^2 & A_0^2 \end{vmatrix} \quad \Gamma_2 = \begin{vmatrix} |A_2|^2 & A_2^{*2} \\ A_2^2 & |A_2|^2 \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_{\pi^+\pi^-} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} A_0^2 + \frac{1}{3} |A_2|^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3} A_0 \operatorname{Re} A_2 F & \frac{2}{3} A_0^2 + \frac{1}{3} A_2^{*2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} A_0 A_2^* \cos(\delta_2 - \delta_0) \\ \frac{2}{3} A_0^2 + \frac{1}{3} A_2^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3} A_0 A_2 \cos(\delta_2 - \delta_0) & \frac{2}{3} A_0^2 + \frac{1}{3} |A_2|^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3} A_0 \operatorname{Re} A_2^* F \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_{\pi^0\pi^0} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} A_0^2 + \frac{2}{3} |A_2|^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} A_0 \operatorname{Re} A_2 F & \frac{1}{3} A_0^2 + \frac{2}{3} A_2^{*2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} A_0 A_2^* \cos(\delta_2 - \delta_0) \\ \frac{1}{3} A_0^2 + \frac{2}{3} A_2^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} A_0 A_2 \cos(\delta_2 - \delta_0) & \frac{1}{3} A_0^2 + \frac{2}{3} |A_2|^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} A_0 \operatorname{Re} A_2^* F \end{vmatrix}$$

Mode 3π .

$$\Gamma_{I\bar{L}} = \begin{vmatrix} |A_{I\bar{L}}|^2 & A_{I\bar{L}}^{*2} (-1)^{L+1} \\ A_{I\bar{L}}^2 (-1)^{L+1} & |A_{I\bar{L}}|^2 \end{vmatrix} \quad \Gamma_{3\pi} = \Sigma \Gamma_{I\bar{L}} = \begin{vmatrix} \alpha_{3\pi} & X_{3\pi} + i Y_{3\pi} \\ X_{3\pi} - i Y_{3\pi} & \alpha_{3\pi} \end{vmatrix}$$

Modes leptoniques.

$$\Gamma_{e^+} = \begin{vmatrix} |f|^2 & f^* g \\ g^* f^* & |g|^2 \end{vmatrix} = \frac{|f|^2 + |g|^2}{2} \begin{vmatrix} 1 + \gamma & \alpha + i\beta \\ \alpha - i\beta & 1 - \gamma \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_{e^-} = \begin{vmatrix} |g|^2 & g f^* \\ f g^* & |f|^2 \end{vmatrix} = \frac{|f|^2 + |g|^2}{2} \begin{vmatrix} 1 - \gamma & \alpha + i\beta \\ \alpha - i\beta & 1 + \gamma \end{vmatrix}$$

avec $\alpha = \frac{2 \operatorname{Re} f^* g}{|f|^2 + |g|^2}$ $\beta = \frac{2 \operatorname{Im} f^* g}{|f|^2 + |g|^2}$ $\gamma = \frac{|f|^2 - |g|^2}{|f|^2 + |g|^2}$

$$\Gamma_e = \Gamma_{e^+} + \Gamma_{e^-} = (|f|^2 + |g|^2) \begin{vmatrix} 1 & \alpha + i\beta \\ \alpha - i\beta & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_e & X_e + i Y_e \\ X_e - i Y_e & \alpha_e \end{vmatrix}$$

Matrice de masse et de désintégration.

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_2 + \Gamma_{3\pi} + \Gamma_e = \begin{vmatrix} \Gamma_{00} & \Gamma_{0\bar{0}} \\ \Gamma_{\bar{0}0} & \Gamma_{\bar{0}\bar{0}} \end{vmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} M_{00} & M_{0\bar{0}} \\ M_{\bar{0}0} & M_{\bar{0}\bar{0}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M & m_r + i m_i \\ m_r - i m_i & M \end{vmatrix}$$

$$W = \frac{\Gamma}{r} + i M = \begin{vmatrix} W_{00} & W_{0\bar{0}} \\ W_{\bar{0}0} & W_{\bar{0}\bar{0}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} W_{00} & p^2 \\ q^2 & W_{00} \end{vmatrix}$$

TABLEAU IV : MATRICE DE DESINTEGRATION DANS LE SYSTEME $K_1^0 K_2^0$

Mode 2π .

$$\Gamma_0 = \begin{vmatrix} 2 A_0^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_2 = \begin{vmatrix} \frac{|A_2 + A_2^*|^2}{2} & \frac{A_2^2 - A_2^{*2}}{2} \\ \frac{A_2^{*2} - A_2^2}{2} & \frac{|A_2 - A_2^*|^2}{2} \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_{\pi^+\pi^-} = \begin{vmatrix} \frac{4}{3} A_0^2 + \frac{|A_2 + A_2^*|^2}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3} A_0 (A_2 + A_2^*)(F + F^*) & \frac{\sqrt{2}}{3} A_0 (A_2 - A_2^*) F + \frac{A_2^2 - A_2^{*2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} A_0 (A_2^* - A_2) F^* + \frac{A_2^{*2} - A_2^2}{6} & \frac{|A_2 - A_2^*|^2}{6} \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_{\pi^0\pi^0} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} A_0^2 + \frac{|A_2 + A_2^*|^2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} A_0 (A_2 + A_2^*)(F + F^*) & \frac{\sqrt{2}}{3} A_0 (A_2^* - A_2) F + \frac{A_2^2 - A_2^{*2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} A_0 (A_2 - A_2^*) F^* + \frac{A_2^{*2} - A_2^2}{3} & \frac{|A_2 - A_2^*|^2}{3} \end{vmatrix}$$

Mode 3π .

$$\begin{vmatrix} \frac{|A_{I\ell} + A_{I\ell}^* (-1)^{\ell+1}|^2}{2} & \frac{(-1)^{\ell+1} (A_{I\ell}^2 - A_{I\ell}^{*2})}{2} \\ \frac{(-1)^{\ell+1} (A_{I\ell}^{*2} - A_{I\ell}^2)}{2} & \frac{|A_{I\ell} - A_{I\ell}^* (-1)^{\ell+1}|^2}{2} \end{vmatrix}$$

Modes Leptoniques

$$\Gamma_{e^+} = \begin{vmatrix} \frac{|f+g|^2}{2} & \frac{(f+g)^*(f-g)}{2} \\ \frac{(f+g)(f-g)^*}{2} & \frac{|f-g|^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{|f|^2 + |g|^2}{2} \begin{vmatrix} 1+\alpha & \gamma-i\beta \\ \gamma+i & 1-\alpha \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_{e^-} = \begin{vmatrix} \frac{|f+g|^2}{2} & \frac{(f+g)(g-f)^*}{2} \\ \frac{(f+g)^*(g-f)}{2} & \frac{|g-f|^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{|f|^2 + |g|^2}{2} \begin{vmatrix} 1+\alpha & -\gamma-i\beta \\ -\gamma+i\beta & 1-\alpha \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_e = \Gamma_{e^+} + \Gamma_{e^-} = (|f|^2 + |g|^2) \begin{vmatrix} 1+\alpha & -i\beta \\ i\beta & 1-\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_e + X_e & -i y_e \\ i y_e & a_e - X_e \end{vmatrix}$$

TABLEAU V : NOMBRES D'ORIGINES PAR EVENEMENT

Nombres d'origines n	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de K_β ayant n origine avant ciné- matiques	23	142	103	32	12	2	1
Nombre de K_β ayant n origine à $X^2 < 13$	40	184	68	18	4	0	1

ANNEXE I : CALCUL DE LA PROBABILITE D'UNE CONFIGURATION

POSITION DU PROBLEME.

Nous nous intéressons à une désintégration ou, plus généralement, à un événement dépendant de K variables aléatoires θ_k dont la loi de probabilité est $P(\theta_k)$.

$$\int P(\theta_k) d\theta_k = 1 \quad (1)$$

Nous mesurons N variables $x_\mu (\theta_k)$ qui sont donc liées par $J = N - K$ équations de contraintes

$$C_j(x_\mu) = 0$$

Soit x_μ^m le résultat de la mesure des x_μ .

Soit $g_{\mu\nu}$ la matrice des covariances correspondantes.

Soit $G_{\mu\nu}$ la matrice d'erreur.

$$G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{-1} = \overline{(x_\mu^m - x_\mu)(x_\nu^m - x_\nu)}$$

Nous voulons connaître la loi de probabilité $\mathcal{P}(x_\mu^m)$ des x_μ^m

$$\int \mathcal{P}(x_\mu^m) dx_\mu^m = 1 \quad (2)$$

I - PREMIERE METHODE DE RESOLUTION.

Supposons les erreurs de mesures gaussiennes, la loi de probabilité des θ_k et x_μ^m sera :

$$\frac{\sqrt{|g_{\mu\nu}|}}{2\pi^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x_\mu^m - x_\mu) g_{\mu\nu} (x_\nu^m - x_\nu)} P(\theta_k) d\theta_k dx_\mu^m$$

où $|g_{\mu\nu}|$ est le déterminant de la matrice $g_{\mu\nu}$ et où x_μ est fonction de θ_k .

La loi de probabilité des x_μ^m quels que soient les θ_k (que nous ne connaissons pas) est alors :

$$\mathcal{P}(x_\mu^m) = \frac{\sqrt{|g_{\mu\nu}|}}{2\pi \frac{N}{2}} \int e^{-\frac{1}{2} (x_\mu^m - x_\mu) g_{\mu\nu} (x_\nu^m - x_\nu)} P(\theta_k) d\theta_k \quad (3)$$

Pour calculer cette intégrale nous allons d'une part supposer que les contraintes sont linéaires au voisinage des valeurs optimisées des variables et d'autre part que $P(\theta_k)$ varie peu pour des valeurs de θ_k voisines des valeurs optimisées. Nous pouvons alors développer le coefficient de l'exponentielle dans (3) au voisinage des valeurs optimisées qui le rende justement stationnaire (et minimum).

Mais avant de faire ce calcul, nous allons exposer la méthode de fit pour montrer le lien étroit entre les deux problèmes.

Soient x_μ^f les valeurs optimisées des variables : ce sont les valeurs rendant minimum le coefficient de l'exponentielle dans (3), les contraintes étant satisfaisantes. La méthode des multiplicateurs de Lagrange fournit le système d'équations auquel doivent satisfaire les x_μ^f :

$$g_{\mu\nu} (x_\nu^f - x_\nu^m) + \lambda_j \frac{\partial C_j}{\partial x_\mu} (x_\mu^f) = 0 \quad (4)$$

$$C_j (x_\mu^f) = 0 \quad (5)$$

Pour résoudre ce système nous linéarisons les équations (5) au voisinage des x_ν^m ; C_j^m étant la valeur de la contrainte C_j pour les x_μ^m (5) devient alors :

$$C_j^m + \frac{\partial C_j}{\partial x_\nu} (x_\nu^f - x_\nu^m) = 0 \quad (6)$$

La résolution du système (4), (6) se fait simplement, on obtient :

$$\lambda_j = R_{jj}^{-1} C_j^m$$

$$x_\mu^f - x_\mu^m = - g_{\mu\nu}^{-1} \frac{\partial C_j}{\partial x_\nu} R_{jj}^{-1} C_j^m \quad (7)$$

en posant :

$$R_{jj} = \frac{\partial C_j}{\partial x_\mu} g_{\mu\nu}^{-1} \frac{\partial C_j}{\partial x_\nu} \quad (8)$$

Nous pouvons également à partir de (7) calculer le X^2 :

$$X^2 = C_j^m R_{jj}^{-1} C_j^m \quad (9)$$

En réalité les équations (6) ne sont qu'une forme approchée de (5) et les équations (7) ne fournissent que des valeurs approchées de x_μ^f ; mais on voit se dessiner le processus itératif qui permet de résoudre le système (4) (5) par l'intermédiaire de (7) faisant passer des valeurs x_μ^i (pour x_μ^m) aux valeurs x_μ^{i+1} (pour x_μ^f).

Lorsque la solution x_μ^f est trouvée on peut calculer les valeurs θ_k^f à l'aide des équations :

$$x_\mu(\theta_k^f) = x_\mu^f$$

Revenons maintenant au calcul de $\mathcal{P}(x_\mu^m)$, x_μ peut s'écrire $x_\mu = x_\mu^f + (x_\mu - x_\mu^f)$; le coefficient de l'exponentielle dans (3) devient alors:

$$X^2 + 2 (x_\mu - x_\mu^f) g_{\mu\nu} (x_\nu^f - x_\nu^m) + (x_\mu - x_\mu^f) g_{\mu\nu} (x_\nu - x_\nu^f)$$

le deuxième terme s'écrit d'après les équations (4)

$$- 2 (x_\mu - x_\mu^f) \lambda_j \frac{\partial C_j}{\partial x_\mu}$$

Ce terme est nul si on suppose les contraintes linéaires car x_μ et x_μ^f vérifient les équations de contraintes. On peut alors écrire :

$$\mathcal{P}(x_\mu^m) = \frac{\sqrt{|g_{\mu\nu}|}}{2\pi \frac{N}{2}} e^{-\frac{X^2}{2}} P(\theta_k^f) \int e^{-\frac{1}{2} (x_\mu - x_\mu^f) g_{\mu\nu} (x_\nu - x_\nu^f)} d\theta_k$$

Nous avons maintenant à calculer une intégrale qui ne dépend plus des x_μ^m mais seulement des x_μ^f . Pour le faire introduisons J fonctions $\delta(C_j)$ et intégrons sur C_j : nous ne changeons rien puisque $\int \delta(C_j) dC_j = 1$. Prenons ensuite comme variables les x_μ (ce sont des fonctions des θ_k et de C_j). On doit introduire le jacobien de cette transformation (nous le supposerons constant).

$$\mathcal{P}(x_\mu) = \frac{\sqrt{|g_{\mu\nu}|}}{2\pi \frac{N}{2}} P(\theta_k) \frac{D(\theta_k, C_j)}{D(x_\mu)} \int e^{-\frac{X^2}{2}} e^{-\frac{1}{2} (x_\mu - x_\mu^f) g_{\mu\nu} (x_\nu - x_\nu^f)} \delta(C_j) dx_\mu$$

En développant au 1er ordre $C_j = \frac{\partial C_j}{\partial x_\mu} (x_\mu - x_\mu^f)$ on obtient des formes linéaires dans les fonctions δ et on peut alors effectuer l'intégration; on obtient :

$$\mathcal{P}(x_\mu^m) = \frac{e^{-\frac{X^2}{2}}}{2\pi \frac{J}{2}} P(\theta_k^f) \frac{D(\theta_k, C_j)}{D(x_\mu)} \frac{1}{\sqrt{|R_{jj}|}} \quad (10)$$

ou $|R_{jj}|$ est le déterminant de la matrice R_{jj} , définie par (8).

Cas particulier d'une contrainte.

On a alors $X^2 = \frac{(C^m)^2}{R}$ d'après l'équation (9)

et $(x_\mu^m) = \sqrt{\frac{X^2}{2\pi}} e^{-\frac{X^2}{2}} P(\theta_k^f) \frac{D(\theta_k, C)}{D(x_\mu)} \frac{1}{C^m}$

II - DEUXIEME METHODE DE RESOLUTION.

La méthode exposée ci-dessus est aux notations près la méthode publiée en référence 32 elle est bien adoptée au problème de la désintégration du K_β .

Nous allons cependant exposer une méthode un peu différente qui peut être utile surtout lorsque l'on ne sait pas calculer $\frac{D(\theta_k, C)}{D(x_\mu)}$.

Elle a de plus l'avantage de donner une interprétation physique à l'équation (9). Cette méthode ne fait pas appel à la notion d'équation de contrainte, le point de départ est comme pour la précédente l'équation (3) et elle implique corrélativement une autre méthode de fit que nous allons d'abord exposer.

Méthode de Fit.

Cette méthode consiste, à l'inverse de la précédente, à calculer d'abord les θ_k^f puis x_μ^f .

Nous cherchons les θ_k rendant minimum l'expression

$$(x_\mu(\theta_k) - x_\mu^m) g_{\mu\nu} (x_\nu(\theta_k) - x_\nu^m)$$

nous avons cette fois un problème d'extrémum libre dont la solution est donnée par les équations suivantes :

$$\frac{\partial x_{\mu}}{\partial \theta_k^i} g_{\mu\nu} (x_{\nu}^i - x_{\nu}^m) = 0 \quad (11)$$

Nous résolvons ce système par itération comme précédemment : soit θ_k^i des valeurs de θ_k^i x_{μ}^i les valeurs correspondantes de x_{μ} ; on

peut écrire pour $\theta_k^{i+1} - \theta_k^i$ petit

$$x_{\mu}(\theta_k^{i+1}) = x_{\mu}^i + \frac{\partial x_{\mu}}{\partial \theta_k^i} (\theta_k^{i+1} - \theta_k^i)$$

et remplacer (11) par

$$\frac{\partial x_{\mu}}{\partial \theta_k^i} g_{\mu\nu} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial \theta_{\ell}^i} (\theta_{\ell}^{i+1} - \theta_{\ell}^i) = \frac{\partial x_{\mu}}{\partial \theta_k^i} g_{\mu\nu} (x_{\nu}^i - x_{\nu}^m) \quad (12)$$

La résolution du système linéaire (12) fournit θ_k^{i+1} connaissant θ_k^i . Le calcul s'arrête lorsque la résolution de (12) fournit $\theta_k^{i+1} = \theta_k^i = \theta_k^f$ les équations (11) sont alors satisfaites.

Formules d'erreurs.

En vue de l'interprétation que nous voulons donner de (10), nous allons maintenant calculer les formules d'erreurs sur le fit. Dans toute la suite nous supposons les x_{μ} fonctions linéaires des θ_k c'est-à-dire $\frac{\partial x_{\mu}}{\partial \theta_k}$ constant.

Soient θ_k^v les vraies valeurs des θ_k , x_μ^v les valeurs correspondantes de x_μ . Ecrivons l'équation (12) pour $\theta_k^i = \theta_k^v$:

$$d_{k\ell} (\theta_k^f - \theta_k^v) = \frac{\partial x_\mu}{\partial \theta_k} g_{\mu\nu} (x_\nu^f - x_\nu^m)$$

en posant :

$$d_{k\ell} = \frac{\partial x_\mu}{\partial \theta_k} g_{\mu\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial \theta_\ell} = D_{k\ell}^{-1}$$

d'où :

$$\theta_k^f - \theta_k^v = D_{k\ell} \frac{\partial x_\mu}{\partial \theta_\ell} g_{\mu\nu} (x_\nu^f - x_\nu^m) \quad (13)$$

(13) permet de calculer les valeurs moyennes des θ_k^f et les matrices d'erreurs :

$$\overline{\theta_k^f - \theta_k^v} = 0 \quad \text{l'estimation } \theta_k^f \text{ de } \theta_k^v \text{ n'est pas biaisée}$$

$$\begin{aligned} \overline{(\theta_k^f - \theta_k^v)(\theta_\ell^f - \theta_\ell^v)} &= D_{kk'} \frac{\partial x_\mu}{\partial \theta_{k'}} g_{\mu\nu} (x_\nu^f - x_\nu^m) (x_{\nu'}^f - x_{\nu'}^m) g_{\nu'\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial \theta_\ell} D_{\ell'\ell} \\ &= D_{kk'} \frac{\partial x_\mu}{\partial \theta_{k'}} g_{\mu\mu} G_{\mu'\nu'} g_{\nu'\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial \theta_\ell} D_{\ell'\ell} \\ &= D_{kk'} d_{k'\ell'} D_{\ell'\ell} = D_{k\ell} \end{aligned} \quad (14)$$

donc $D_{k\ell}$ est la matrice d'erreur de θ_k^f . La matrice d'erreur des x_μ^f s'obtient à partir de :

$$x_\mu^f = x_\mu^v + \frac{\partial x_\mu}{\partial \theta_k} (\theta_k^f - \theta_k^v)$$

on obtient :

$$\overline{(x_\mu^f - x_\mu^v)(x_{\nu'}^f - x_{\nu'}^v)} = \boxed{G_{\mu\nu}^f = \frac{\partial x_\mu}{\partial \theta_k} D_{k\ell} \frac{\partial x_{\nu'}}{\partial \theta_\ell}} \quad (15)$$

Remarques.

- G_v^f est une matrice singulière si $N > K$

- Les relations $\text{Tr} (Gg) = N$; $\text{Tr} (G^f g) = K = N - J$ montrent le gain dû au fit.

Revenons maintenant au calcul de $\mathcal{P}(x_\mu)$.

Développons le coefficient de l'exponentielle autour de θ_k^f ;
on obtient :

$$x^2 + 2 (\theta_k - \theta_k^f) \frac{\partial x_\mu}{\partial \theta_k} g_{\mu\nu} (x_\nu - x_\nu^m) + (\theta_k - \theta_k^f) d_{k\ell} (\theta_\ell - \theta_\ell^f)$$

le 2ème terme est nul d'après (11) d'où :

$$\mathcal{P}(x_\mu^m) = e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{2\pi^{J/2}} \sqrt{|g_{\mu\nu}|} \int P(\theta_k) e^{-\frac{1}{2} (\theta_k - \theta_k^f) d_{k\ell} (\theta_\ell - \theta_\ell^f)} d\theta_k$$

Si on suppose $P(\theta_k)$ constant au voisinage de θ_k^f on a :

$$\boxed{\mathcal{P}(x_\mu^m) = \frac{1}{2\pi^{J/2}} e^{-\frac{x^2}{2}} P(\theta_k^f) \sqrt{\frac{|g_{\mu\nu}|}{|d_{k\ell}|}}} \quad (16)$$

bien que les hypothèses faites pour cette méthode semblent plus restrictives que pour la première méthode puisque l'on s'est imposé que $\frac{\partial x_\mu}{\partial \theta_k}$ soit constant

il n'en est rien car pour la première méthode on avait supposé que $\frac{D(\theta_k, C_\ell)}{D(x_\mu)}$

soit constant ce qui est la même chose puisque ce jacobien contient de telles dérivées. En fait les expressions (10) et (16) sont équivalentes, mais la dernière se prête mieux à une interprétation.

Considérons dans l'espace x_μ un ellipsoïde centré en x_μ^m et défini par la matrice $g_{\mu\nu}$:

$$(x_\mu - x_\mu^m) g_{\mu\nu} (x_\nu - x_\nu^m) = 1$$

c'est ce que l'on peut appeler l'ellipsoïde d'erreur de x_μ^m . Il y a une probabilité déterminée (fonction de N seul) que x_μ^v soit à l'intérieur de cet ellipsoïde. On peut considérer de même dans l'espace θ_k ellipsoïde d'erreur centré autour de θ_k^f :

$$(\theta_k - \theta_k^f) d_{k\ell} (\theta_\ell - \theta_\ell^f) = 1$$

$\sqrt{\frac{|g_{\mu\nu}|}{|d_{k\ell}|}}$ est, à une constante près, le quotient des volumes de ces deux ellipsoïdes. On voit donc que $\mathcal{P}(x_\mu)$ dépend par $P(\theta_k^f)$ de la probabilité à priori de la configuration θ_k^f , par $e^{-\frac{\chi^2}{2}}$ de la qualité du fit et par $\sqrt{\frac{|g_{\mu\nu}|}{|d_{k\ell}|}}$ en quelque sorte du rapport entre la grandeur des erreurs des variables mesurées x_μ et la grandeur des erreurs induites sur les variables de configuration θ_k^f . On peut dire que ce rapport est une évaluation de la sensibilité des variables θ_k^f , qui définissent l'événement, aux erreurs sur les variables x_μ , que l'on mesure.

ANNEXE II : MESURE DU FACTEUR DE FORME DU K_{l3}^0

Le problème que nous nous posons est le suivant : ayant un lot d'événements K_{β} expérimentaux E et un lot d'événements générés par Monte-Carlo C nous voulons calculer le coefficient λ dont dépend le facteur de forme :

$$f = f_0 \left(1 + \lambda \frac{q^2}{m_{\pi}^2} \right)$$

Notations.

Soient $v = \frac{q^2}{2}$ et $v' = p_e - p_v$ les valeurs réelles pour un K_{β}

des variables dans le centre de masse (ces valeurs ne sont connues que pour les événements C); soient f et f' les valeurs correspondantes données par le fit. La probabilité d'obtenir les valeurs v, v', f, f' est :

$$\mathcal{D}(v, v') (1 + \lambda v) p(f, f' \text{ si } v, v') dv dv' df df'$$

Détant l'élément de matrice pour une désintégration de type vectoriel. $p(f, f' \text{ si } v, v')$ est la loi de probabilité conditionnelle de f et f' la normalisation $\int p(f, f' \text{ si } v, v') df df'$ ne dépendant que des conditions expérimentales.

Pour les événements E on ne connaît pas v et v' on doit donc utiliser la loi de probabilité de f et f' qui est :

$$\int \mathcal{D}(v, v') (1 + \lambda v) p(f, f' \text{ si } v, v') dv dv'$$

et le logarithme de la fonction de vraisemblance de λ est :

$$W(\lambda) = \sum_E \text{Log} \frac{\int \mathcal{D}(v, v')(1 + \lambda v) p(f, f' \text{ si } v, v') dv dv'}{\int \mathcal{D}(v, v')(1 + \lambda v) p(f, f' \text{ si } v, v') dv dv' df df'}$$

soit en posant :

$$F(f, f') = \frac{\int v \mathcal{D}(v, v') p(f, f' \text{ si } v, v') dv dv'}{\int \mathcal{D}(v, v') p(f, f' \text{ si } v, v') dv dv'} \quad (1)$$

$$V = \frac{\int v \mathcal{D}(v, v') dv dv'}{\int \mathcal{D}(v, v') dv dv'} \quad (2)$$

il vient à des facteurs indépendants de λ près :

$$W(\lambda) = \sum_E \text{Log} [1 + \lambda F(f, f')] - N_E \text{Log} (1 + \lambda V) \quad (3)$$

Connaissant pour les événements C l'ensemble $f f'$ et $v v'$ il devrait être possible de calculer $p(f, f' \text{ si } v, v')$ puis F ; par exemple en découpant les domaines de variations de $f f'$ et $v v'$ en domaines plus petits. Mais en réalité nous n'avons pas assez d'événements pour faire un calcul suffisamment précis; nous avons donc décidé d'utiliser une autre méthode pour évaluer F .

Cette méthode consiste à prendre pour F une fonction telle que le maximum de vraisemblance conduise à un résultat correct pour les événements C : ces événements ont été tirés au sort suivant une loi uniforme en $v v'$. Intégrant ensuite sur le temps de vie on en a déduit pour chacun une probabilité d'observation q . Si maintenant la distribution des $v v'$ n'est pas uniforme mais obéit à une loi de probabilité $\mathcal{D}(v, v')$ la probabilité d'observation sera $p = q \mathcal{D}(v, v')$. Si de plus le facteur de forme

n'est pas constant mais tel que $f = f_0(1 + \lambda_0 \frac{q^2}{2m_\pi})$ la probabilité d'observation sera $p(1 + \lambda_0 v)$.

Pour chercher le maximum de vraisemblance pour les événements C ainsi modifiés nous écrirons :

$$W_c(\lambda) = \sum_c p_k (1 + \lambda_0 v_k) \text{Log} \frac{1 + \lambda F}{1 + \lambda V}$$

Lorsque nous disons que la méthode appliquée aux événements C est correcte nous voulons dire que $W_c(\lambda)$ est maximum justement pour λ_0 soit :

$$\frac{\partial W_c}{\partial \lambda}(\lambda_0) = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_c p (1 + \lambda_0 v) \left[\frac{F}{1 + \lambda_0 F} - \frac{V}{1 + \lambda_0 V} \right] = 0 \quad (4)$$

En résumé nous calculons V comme la valeur moyenne de v pour les événements C (équation (2)); nous abandonnons pour F la définition (1) mais nous lui imposons de vérifier (4) le mieux possible. Pour ceci nous écrirons F sous la forme d'un développement en puissance de f et f' et nous écrirons que les dérivées successives de (4) par rapport à λ_0 pour $\lambda_0 = 0$ sont nulles.

En fait pour que le calcul ait quelque signification vu le nombre assez restreint d'événements C, nous nous sommes limités à un développement de la forme :

$$F = a + b f + c f'$$

La résolution du système d'équations tiré de (4) soit :

$$V = \frac{\sum p f}{\sum p}$$

$$\sum p F (v - F) = 0$$

$$\sum p F^2 (v - F) = 0$$

conduit à une équation du quatrième degré dont nous avons pris la racine donnant l'erreur minimum c'est-à-dire telle que :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda^2} (\lambda = 0) \text{ soit maximum}$$

on obtient

$$F = 0,3 + 0,66 f - 0,062 f'$$

c'est cette expression que nous avons utilisée dans la méthode du maximum de vraisemblance.

On peut interpréter les différents facteurs en disant que le facteur constant vient compenser l'incertitude sur la mesure de q^2 il correspond à une perte d'information. Le troisième facteur peut correspondre à une distorsion du système de mesure et de reconstitution cinématique : il montre qu'il y a une corrélation entre la valeur de q^2 et celle de $p_e^* - p_v^*$ (cette corrélation peut venir aussi de l'espace de phases disponible et de probabilité d'observation en fonction de q^2 et $p_e^* - p_v^*$).

REFERENCES

- (1) B.AUBERT Thèse (Juin 1964)
L.BEHR Thèse (Mai 1965)
J.P.LOWYS Thèse (Juin 1966)
- (2) J.H.CHRISTENSON, J.W.CRONIN, V.L.FITCH and R.TURLAY - Phys. Rev. Letters, 13, 138 (1964).
- (3) L.LEPRINCE-RINGUET et M.LHERITIER - Compte-Rendu, 219, 618 (1944).
- (4) M.GELL-MANN - Phys. Rev., 92, 833 (1953).
T.NAKANO and K.NISHIJIMA - Progr. Theor. Phys., 10, 581 (1953).
- (5) M.GELL-MANN and A.PAIS - Phys. Rev., 97, 1387 (1955).
- (6) K.LANDE, E.T.BORTH, J.IMPEDUGIA, L.M.LEDERMAN and W.CHINOWSKY - Phys. Rev., 103, 1901 (1956).
- (7) R.W.BRIGE, D.H.PERKINS, J.R.PETERSON, D.H.STARK and M.N.WHITEHEAD - Nuovo Cimento, 4834 (1956).
V.FITCH and R.MOTLEY - Phys. Rev., 101, 496 (1956).
L.W.ALVAREZ, F.S.CRAWFORD, M.L.GOOD and M.L.STEVENSON - Phys. Rev., 101, 503 (1956).
J.OREAR, G.HARRIS and S.TAYLOR - Phys. Rev., 104, 1463 (1956).
- (8) T.D.LEE and C.N.YANG - Phys. Rev., 104, 254 (1956).
- (9) C.S.WU, E.AMBLER, R.W.HAYWORD, D.D.HAPPES and R.P.HUDSON - Phys. Rev., 105, 1413 (1957).
- (10) T.D.LEE - Weak Interaction and Question of C, P, T. Non Invariance Oxford (1965) p.229.
Voir aussi T.D.LEE and G.C.WICK - Phys. Rev., 148, 1385 (1966).
- (11) J.J.SAKURAI - Invariance Principles and Elementary Particles, p. 142. Princeton University Press (1964)
- (12) A.MESSIAH - Mécanique Quantique, Tome II, p. 546. (Dunod 1959)
- (13) R.P.FEYNMAN and M.GELL-MANN - Phys. Rev., 109, 193 (1958).

- (14) W.GABRAITH, G.MANNING, A.E.TAYLOR, B.D.JONES, J.MALOS, A.ASTBURY, N.H.LIPMAN and T.G.WALKER - Phys. Rev. Letters, 14, 383 (1965).
Y.DE BOUARD, D.DEKKERS, B.JORDAN, R.MERMOD, P.SCHARFF, L.VALENTIN, M.VIVARGENT, M.BOTT-BODENHAUSEN - Phys. Letters, 15, 58 (1965).
V.L.FITCH, R.F.ROTH, J.S.RUSS and W.VERNON - Phys. Rev. Letters, 15, 73 (1965).
- (15) J.S.BELL and J.K.PERRING - Phys. Rev. Letters, 13, 348 (1964).
- (16) J.BERNSTEIN, N.CABIBBO and T.D.LEE - Phys. Letters, 12, 146 (1964).
- (17) J.W.CRONIN - Proceedings of the Argonne Conference (1965).
- (18) M.LEVY and M.NAUENBERG - Phys. Letters, 12, 155 (1964).
- (19) A.MESSIAH and W.GREENBERG - Phys. Rev., 136, 248 (1964).
- (20) B.LAUREND and M.ROOS - Phys. Letters, 13, 138 (1964).
- (21) V.F.WEISSKOPF and E.P.WIGNER - Z.Physik, 63, 54 (1930) et 65, 18 (1930).
- (22) B.LIPPMAN and J.SCHWINGER - Phys. Rev., 79, 469 (1949).
W.HEITLER - Quantum Theory of Radiation (Oxford 1964).
- (23) A.MESSIAH - Traitement Formel des Etats Métastables. Groupe d'Etudes de Physique Théorique des Hautes Energies. Conférences sur la Physique des Particules Etrangées (1959).
- (24) T.T.WU and C.N.YANG - Phys. Rev. Letters, 13, 380 (1964).
- (25) J.S.BELL and J.STEINBERGER - Proceedings of the Oxford International Conference and Elementary Particles (1965), Rutherford High Energy Laboratory (1966).
- (26) G.H.TRILLING - Proceedings of the Argonne Conference (1965).
- (27) G.H.TRILLING - University of California Radiation Laboratory Report N° UCRL - 16473 (1965) (non publié).
- (28) C.RUBBIA and J.STEINBERGER - Phys. Letters, 23, 167 (1966).
- (29) J.M.GAILLARD et al. - Phys. Rev. Letters, 18, 20 (1967).
J.W.CRONIN et al. - Phys. Rev. Letters, 18, 25 (1967).

- (30) J.CANTER et al. - Phys. Rev. Letters, 17, 942 (1966).
R.H.GOOD et al. - Bull. Am. Phys. Soc. 11, 767 (1966).
G.W.MEISNER et al. - Phys. Rev. Letters, 17, 492 (1966).
J.V.JOVANOVICH et al. - Phys. Rev. Letters - 17, 1075 (1966).
- (31) T.D.LEE - Annual Review of Nuclear Science, Ch. 9, Vol. 6, (1966).
- (32) L.BEHR - (Thèse).
- (33) R.G.SACHS - Phys. Rev. Letters, 13, 286 (1964).
- (34) N.BRENE, L.EGARDT and B.QUIST - Nuclear Physics, 22, 553 (1961).
- (35) D.LUERS et al. - Phys. Rev., 133, 1276 (1964).
D.W.CARPENTER et al. - Phys. Rev., 142, 871 (1966).
- (36) E.FERMI - Nuovo Cimento, 11, 1 1934).
- (37) A.FIRESTONE et al. - Phys. Rev. Letters, 16, 556 (1966).
- (38) C.ALFF-STEINBERGER et al. - Phys. Letters, 20, 207 (1966)
 $\Delta m = 0,44 \pm 0,06$
- (39) L.WOLFENSTEIN - Nuovo Cimento, 42, 17 (1966).
- (40) J.P.LOWYS - (Thèse).
- (41) B.AUBERT - (Thèse).
- (42) J.HENNESSY - The Geometry Program Bull $\square$ of the Ecole Polytechnique.
- (43) H.CRAMER - Mathematical Methods of Statistics, Princeton Un. Press 1945.
- (44) D.LUERS - Conférence Internationale d'Aix-en-Provence (1961).
Pour une compilation plus complète, voir Réf. 32.
- (45) N.CABIBBO - Weak Interactions International Conference - Berkeley (1960).
- (46) B.AUBERT et al. - Phys. Letters, 10, 215 (1964) et 11, 267 (1964).

LISTE DES FIGURES

Fig. 1 : Notations

ERREURS SUR LE DIP - 254 EVENEMENTS

Fig. 2 : Electron

Fig. 3 : π

Fig. 4 : K

ERREURS SUR L'AZIMUTH - 254 EVENEMENTS

Fig. 5 : Electron

Fig. 6 : π

Fig. 7 : K

ERREURS RELATIVES SUR LE MOMENT - 254 EVENEMENTS

Fig. 8 : Electron

Fig. 9 : π

Fig. 10 : Moment moyen des K^0 (Lot $\pi^+\pi^-$) en fonction de l'angle d'émission

Fig. 11 : Histogramme des X^2 des événements expérimentaux

Fig. 12 : Histogramme des X^2 des événements du Monte-Carlo

Fig. 13 : Etude cinématique

Fig. 14 : Corrélacion moment moyen d'émission-moment vrai pour les événements du Monte-Carlo

Fig. 15 : Corrélacion moment vrai-moment ajusté pour les événements du Monte-Carlo

Histogramme des poids des K_β

- Fig. 16 : Ancienne méthode
- Fig. 17 : Nouvelle méthode
- Fig. 18 : Définition des variables dans le centre de masse du K
- Fig. 19 : Vue d'un K_β dans la chambre - Principales notations
- Fig. 20 : Déformation de $\exp(-t/\tau_S)$
- Fig. 21 : Déformation de $\exp(-t/\tau_L)$
- Fig. 22 : Déformation de $\exp(-t/2(1/\tau_S + 1/\tau_L)) \cos \Delta mt$
- Fig. 23 : Déformation de $\exp(-t/2(1/\tau_S + 1/\tau_L)) \sin \Delta mt$
- Fig. 24 : Histogramme des temps de vie des événements K_β
Événements des deux signes
- Fig. 25 : Histogramme des temps de vie des événements K_β
Événements à électron positif
- Fig. 26 : Histogramme des temps de vie des événements K_β
Événements à électron négatif
- Fig. 27 : Variation de la vraisemblance (optimisée sur $\text{Im } \frac{g}{f}$)
en fonction de $\text{Re } \frac{g}{f}$
- Fig. 28 : Variation de la vraisemblance (optimisée sur $\text{Re } \frac{g}{f}$)
en fonction de $\text{Im } \frac{g}{f}$
- Fig. 29 : Variation de la vraisemblance dans le plan complexe en fonction
de $\frac{g}{f}$
- Fig. 30 : Variation de la vraisemblance en fonction de λ pour divers lots
d'événements expérimentaux
- Fig. 31 : Vraisemblance en fonction de λ pour les événements du Monte-Carlo
pour diverses valeurs de λ_0 supposées vraies
- Fig. 32 : Histogramme des temps de vie des événements $\pi^+ \pi^- \pi^0$
- Fig. 33 : $\pi^+ \pi^- \pi^0$ Vraisemblance état $I = 1$ symétrique
- Fig. 34 : $\pi^+ \pi^- \pi^0$ Vraisemblance dans l'hypothèse $\Delta I = 1/2$
- Fig. 35 : Représentation graphique de la violation de CP

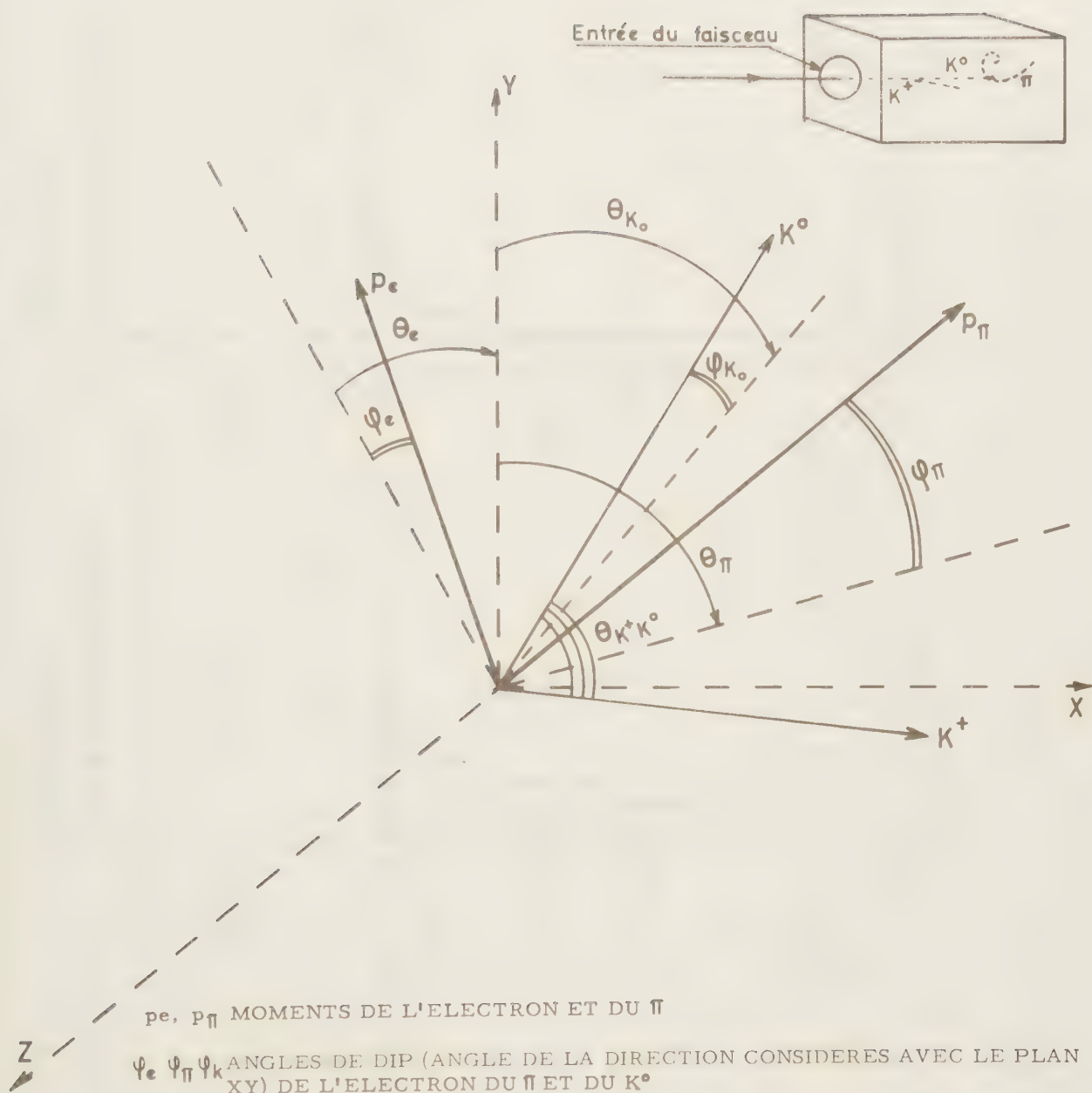


FIG.1 : - NOTATIONS

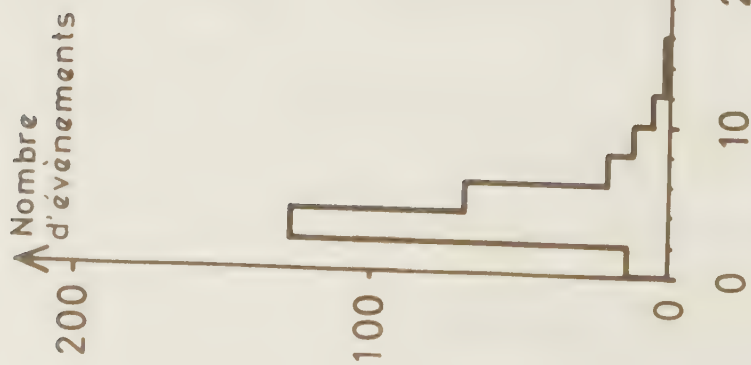


FIG. 2 : - ELECTRON

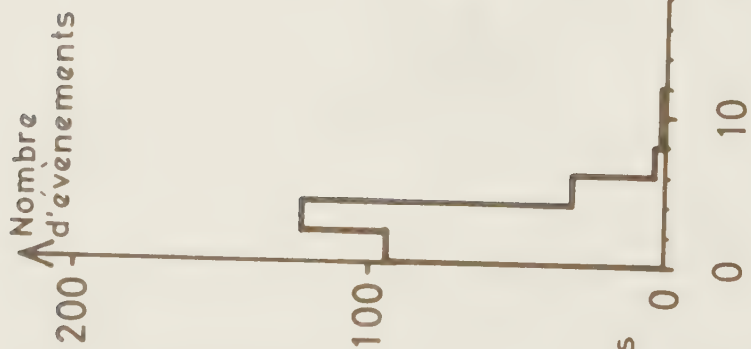


FIG. 3 : - π



FIG. 4 : - K

ERREURS SUR LE DIP - 254 EVENEMENTS

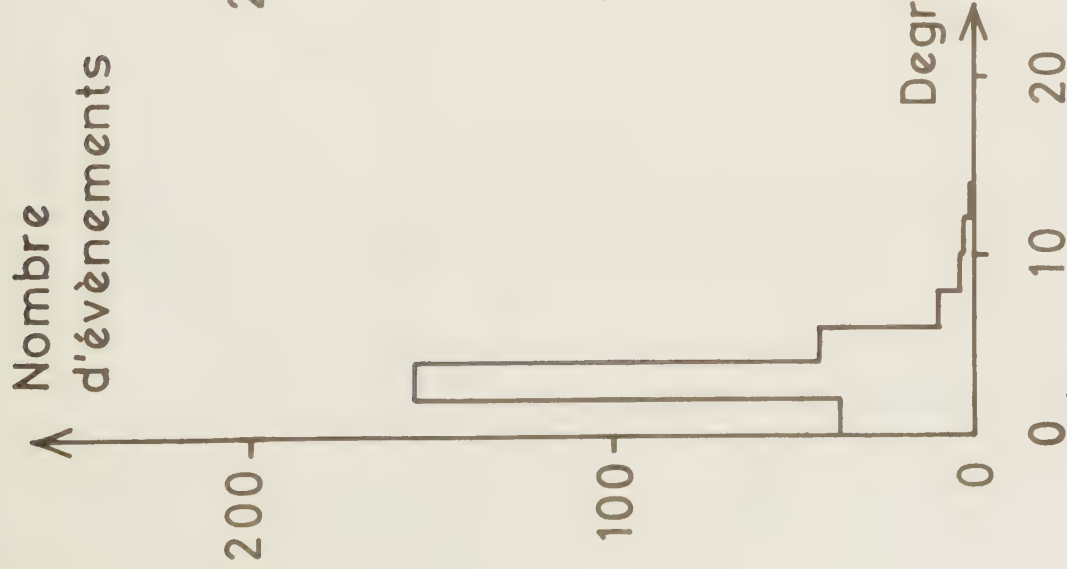


FIG. 5 : - ELECTRON

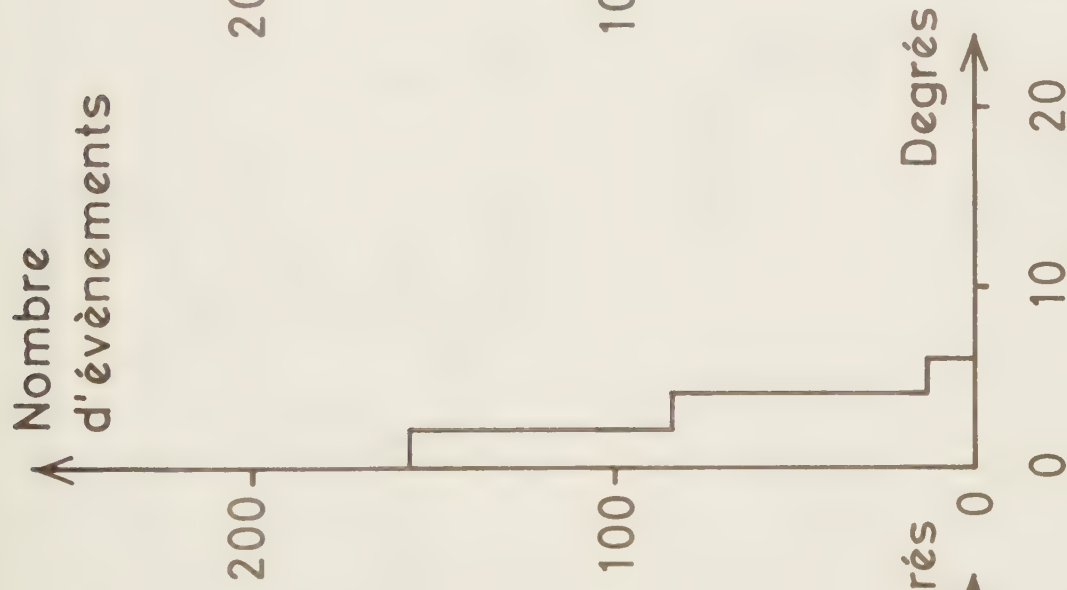


FIG. 6 : - π^-

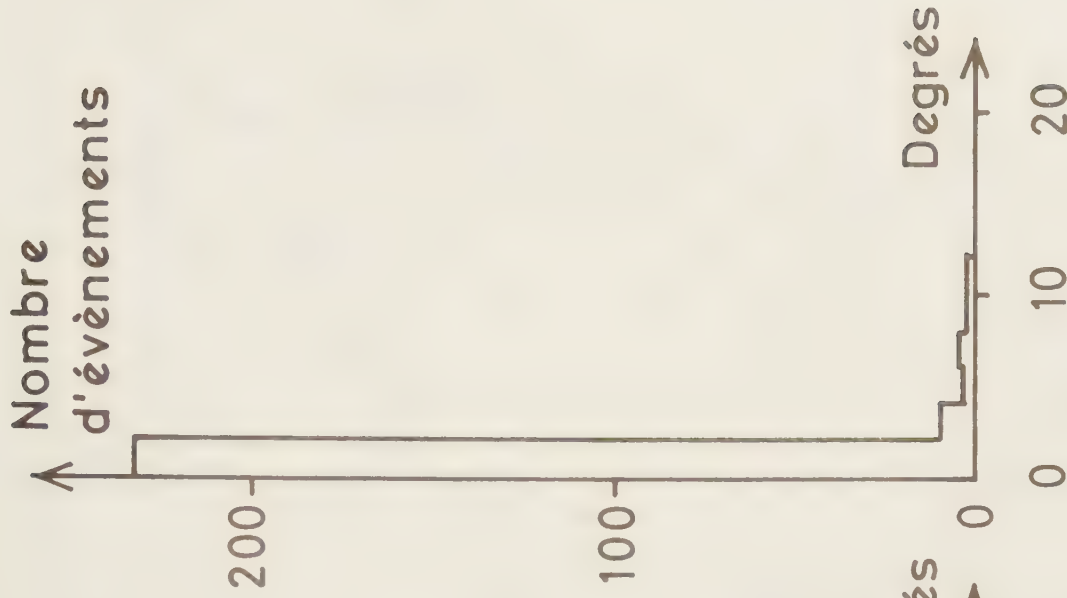


FIG. 7 : - K^-

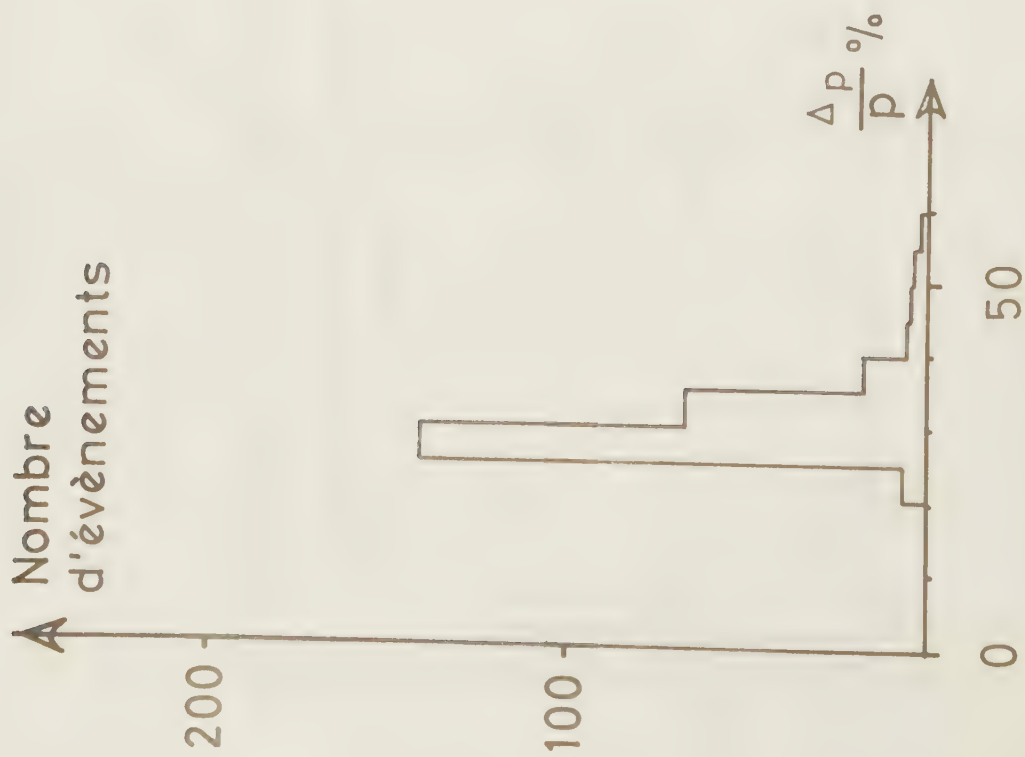


FIG. 8 : - ELECTRON



FIG. 9 : - π

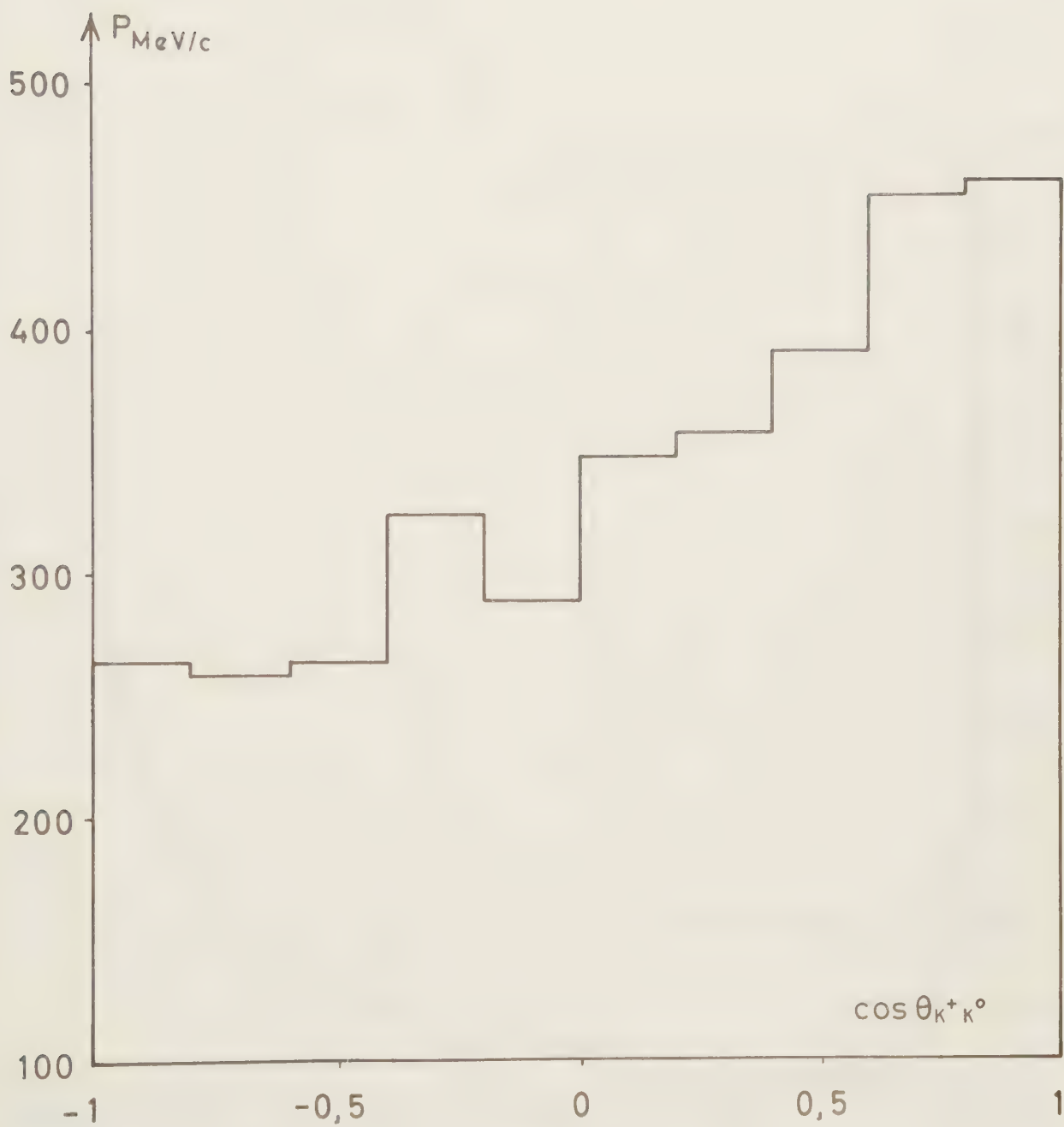


FIG. 10 : - MOMENT MOYEN DES K^0 (LOT $\pi^+\pi^-$) EN FONCTION DE L'ANGLE D'EMISSION

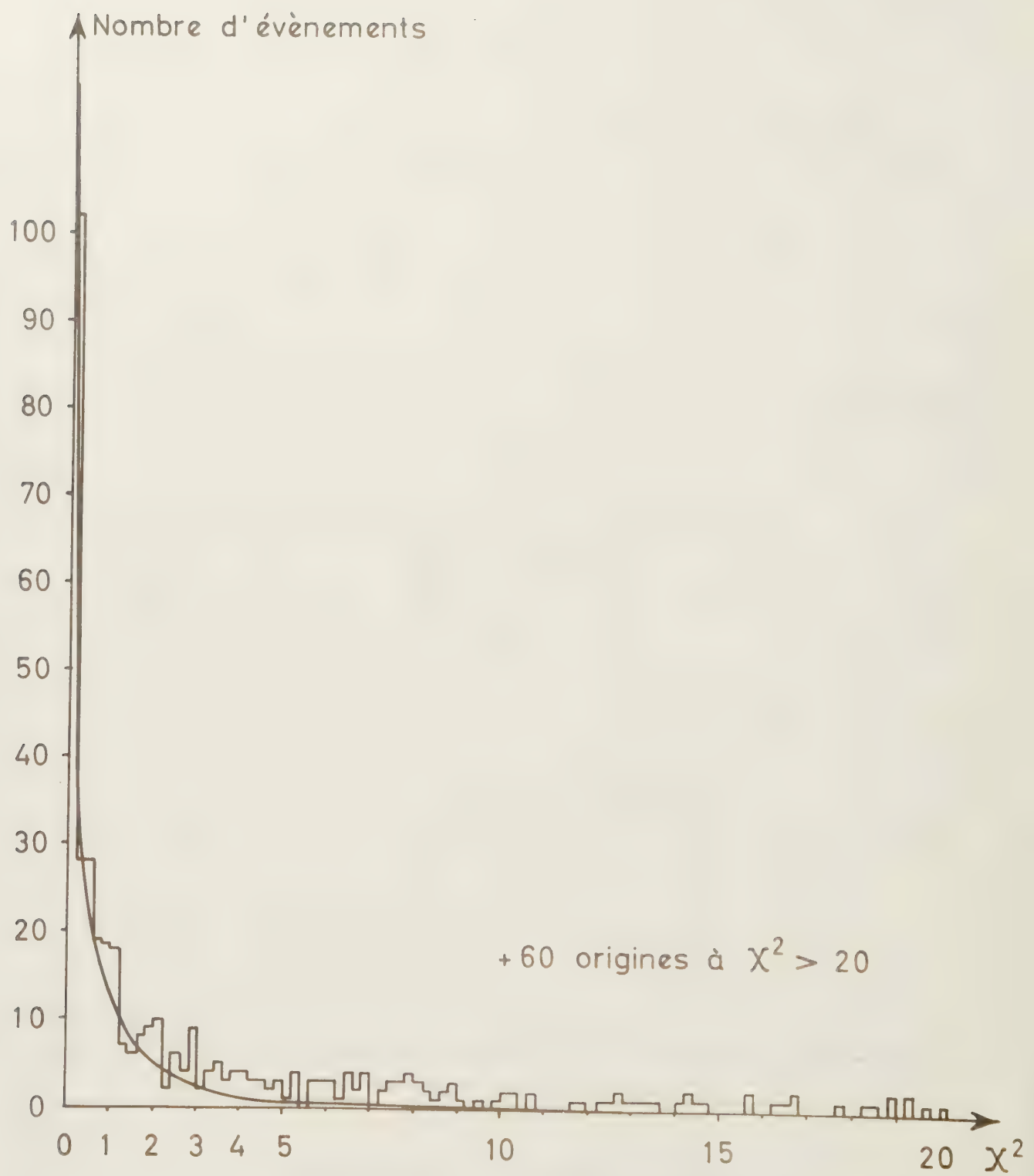


FIG. 11 : - HISTOGRAMME DES χ^2 DES EVENEMENTS EXPERIMENTAUX
(254 EVENEMENTS, 450 ORIGINES)

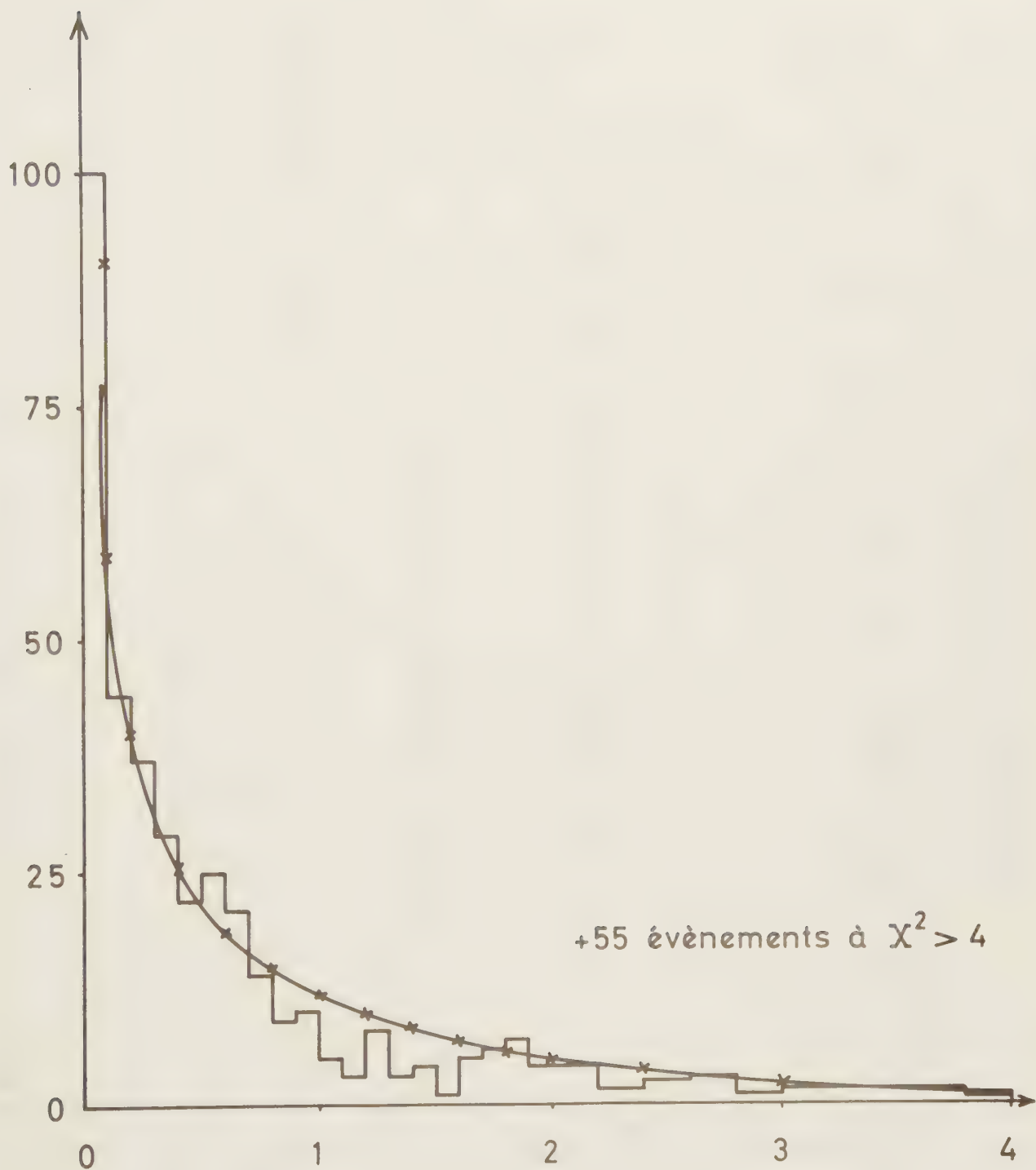


FIG. 12 : - HISTOGRAMME DES χ^2 DES EVENEMENTS DU MONTE CARLO
(448 EVENEMENTS) LA COURBE REPRESENTE LA DISTRIBUTION
THEORIQUE NORMALE AU NOMBRE D'EVENEMENTS

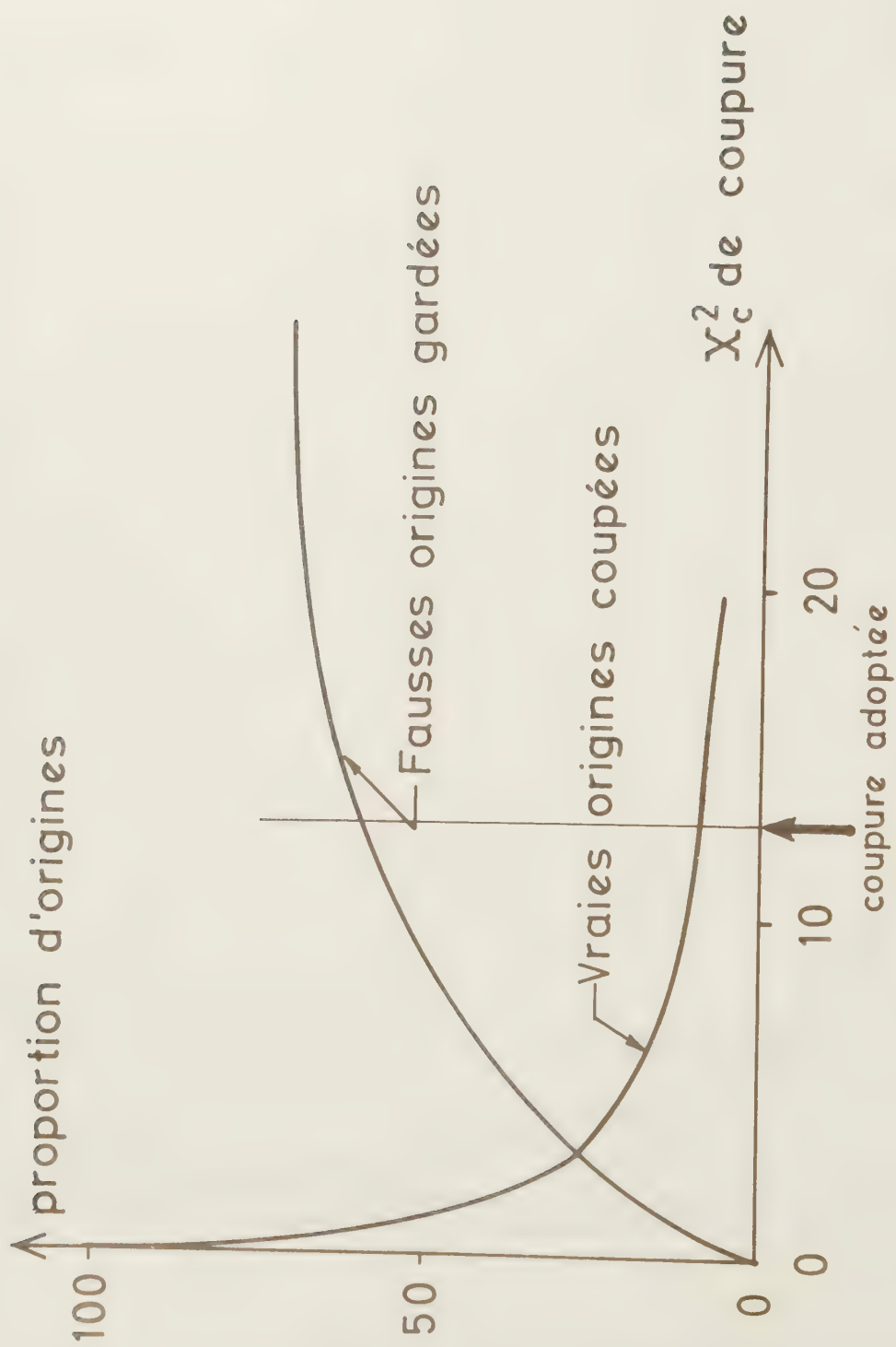


FIG. 13 : - ETUDE CINEMATIQUE SUR 142 EVENEMENTS A 1 ORIGINE

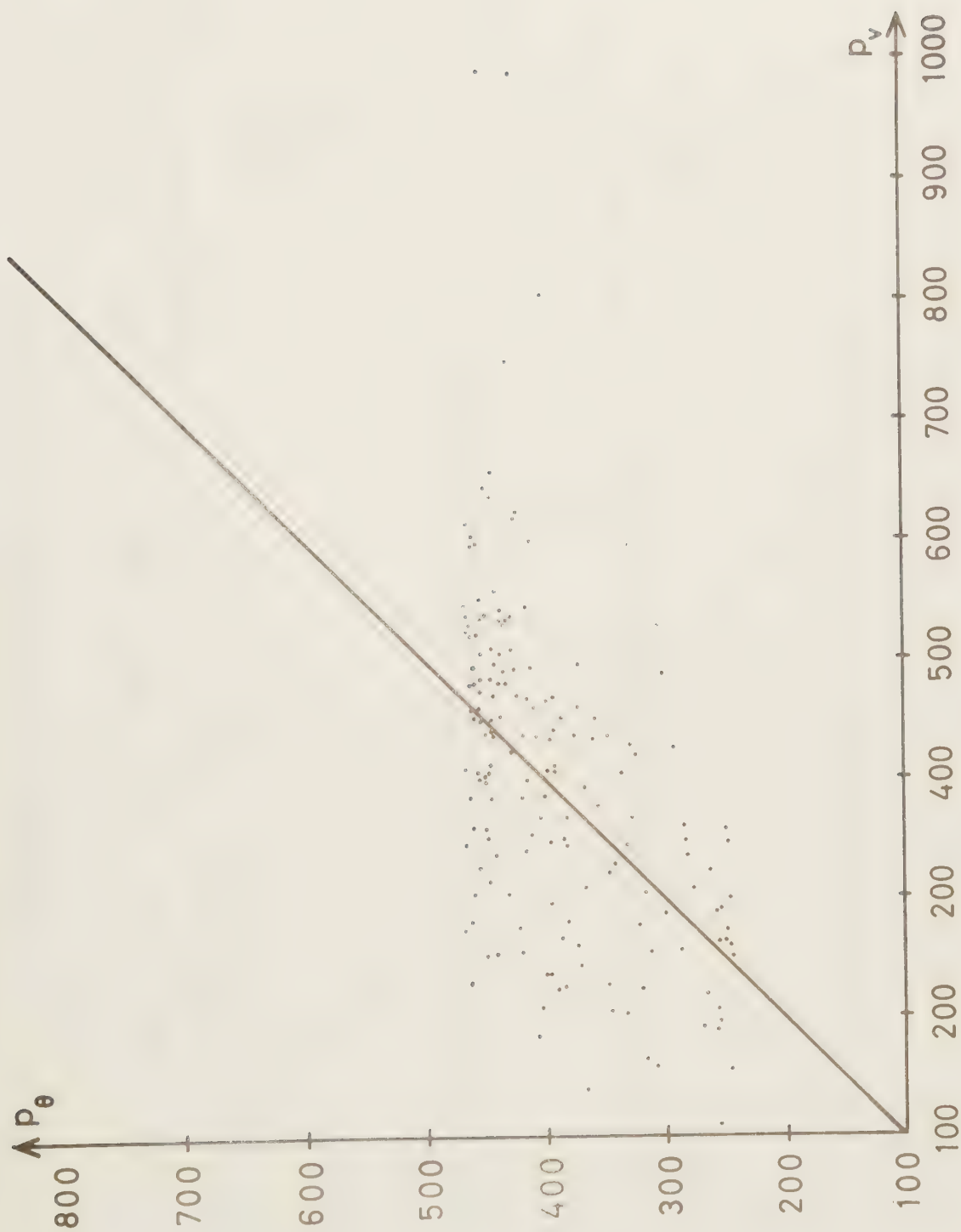


FIG. 14 : - CORRELATION MOMENT MOYEN D'EMISSION-MOMENT VRAI POUR
LES EVENEMENTS DU MONTE CARLO

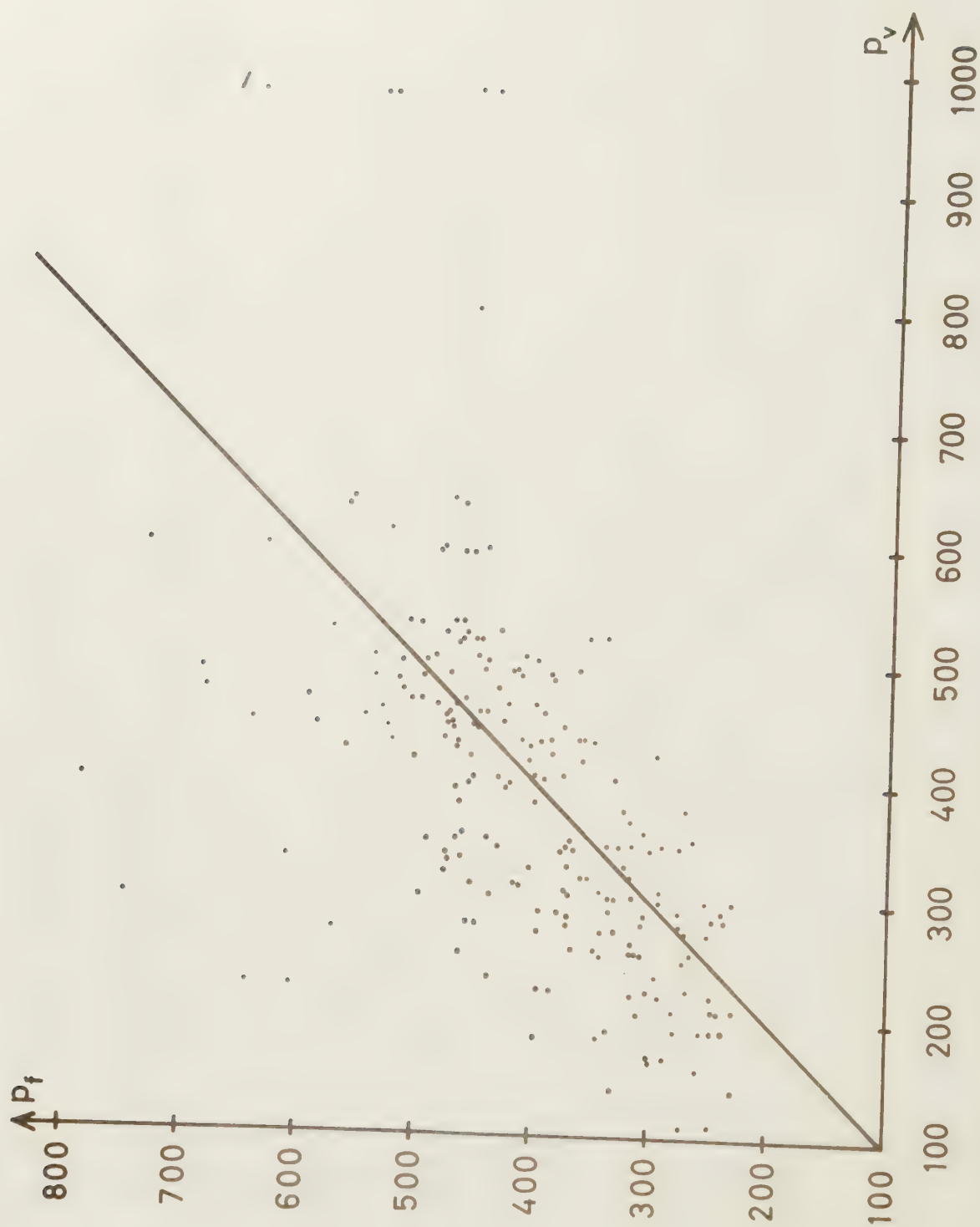


FIG.15 : - CORRELATION MOMENT VRAI-MOMENT AJUSTE POUR LES
EVENEMENTS DU MONTE CARLO

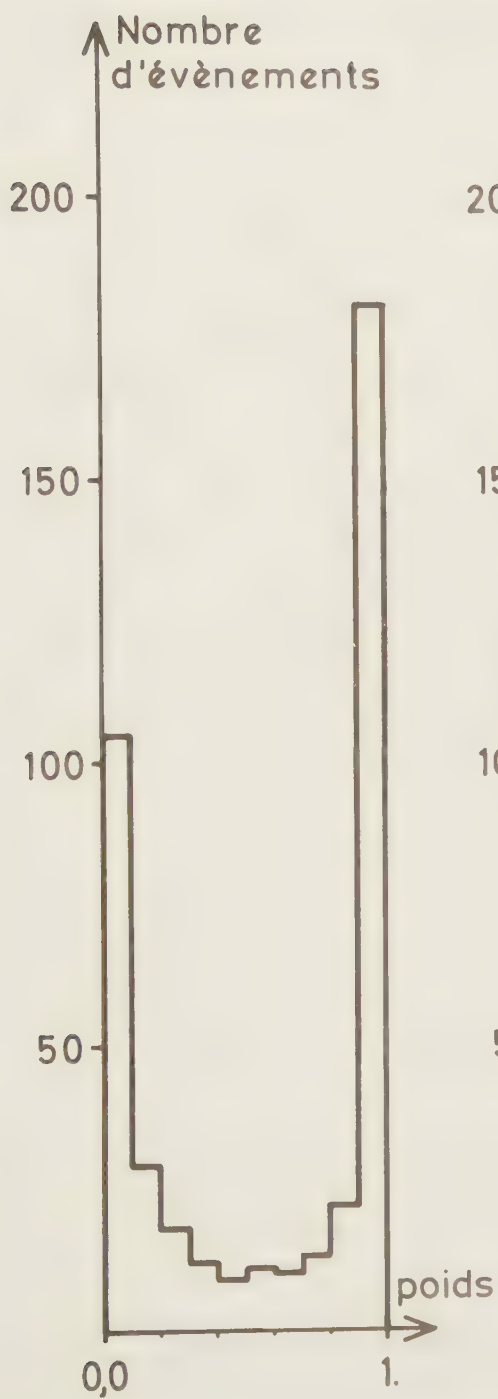


FIG. 16 : - ANCIENNE METHODE

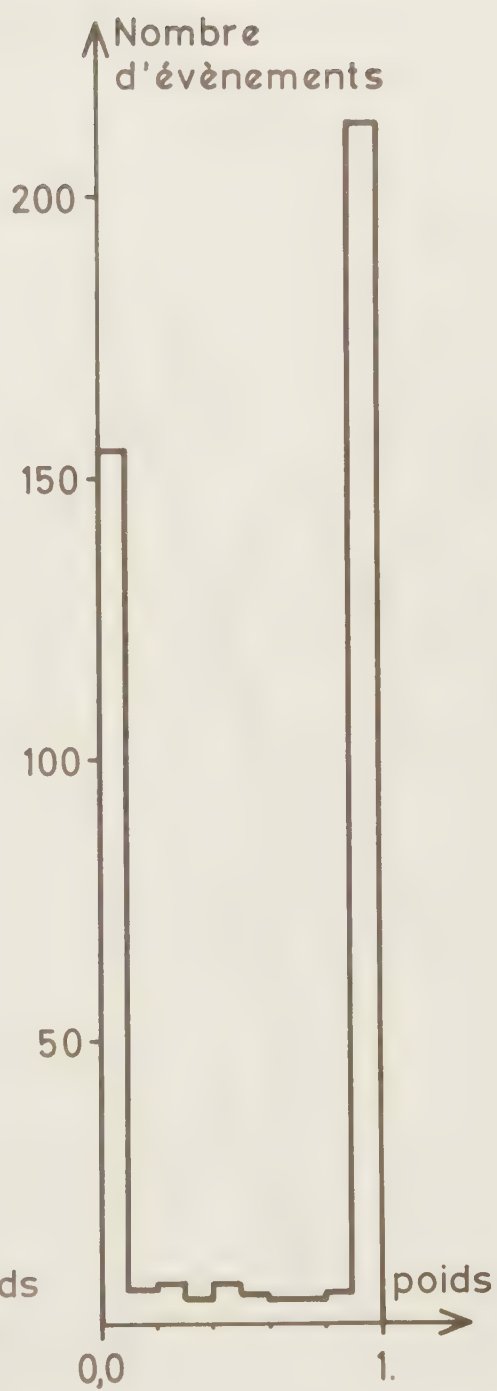


FIG. 17 : - NOUVELLE METHODE

HISTOGRAMME DES POIDS DES $K\beta$

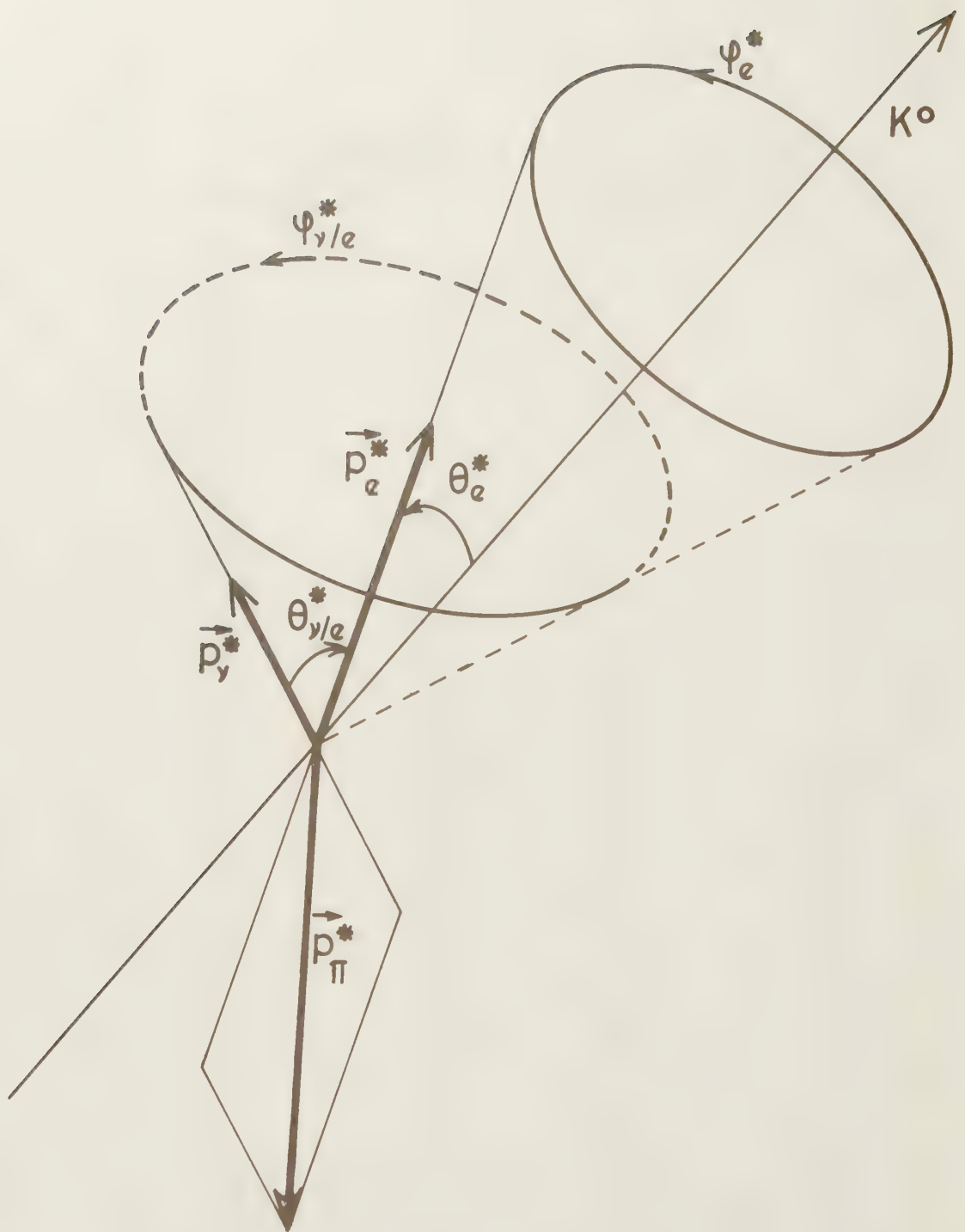


FIG. 18 : - DEFINITION DES VARIABLES DANS LE CENTRE DE MASSE DU K

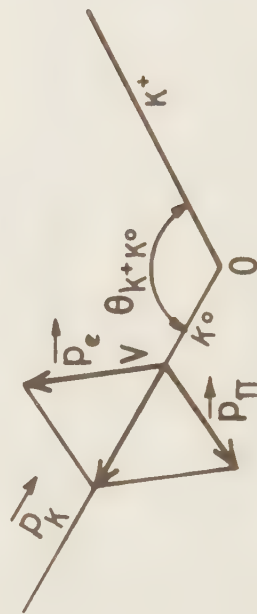
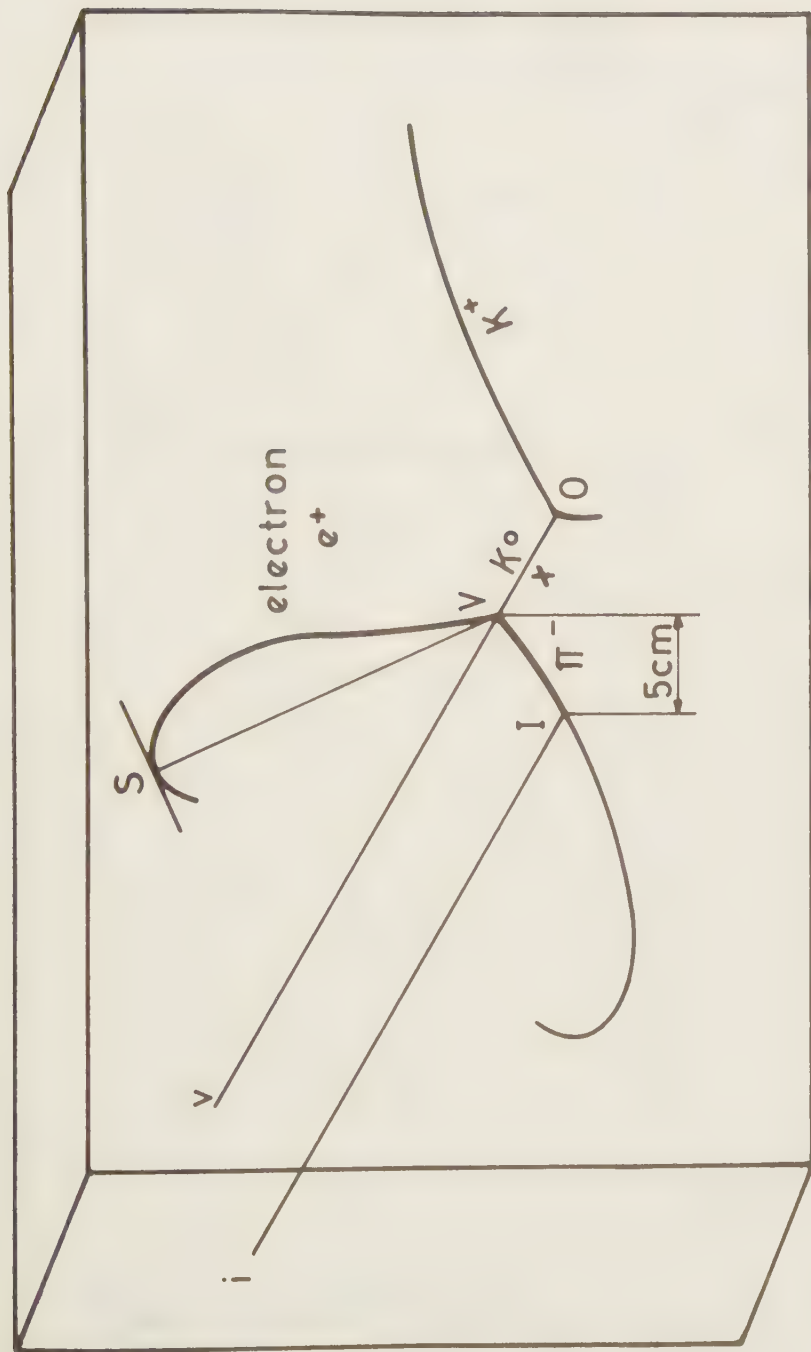


FIG.19 : - VUE D'UN K_β DANS LA CHAMBRE - PRINCIPALES NOTATIONS

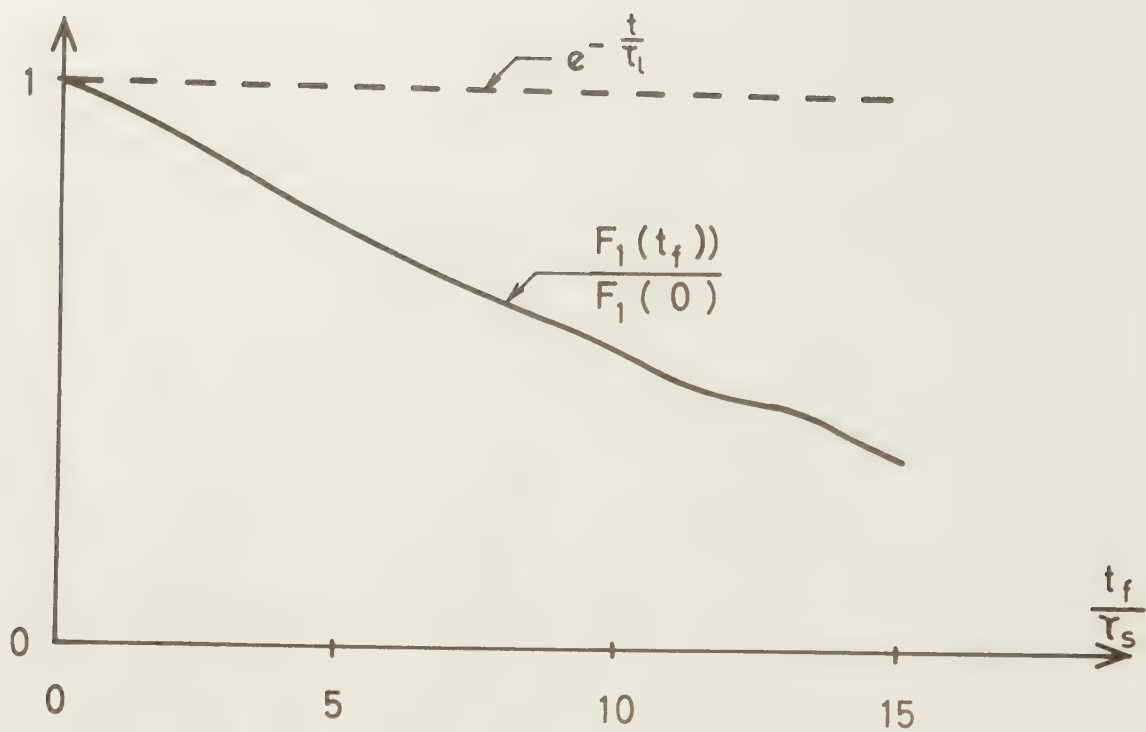


FIG. 20 : - DEFORMATION DE $\exp(-t/\tau_s)$

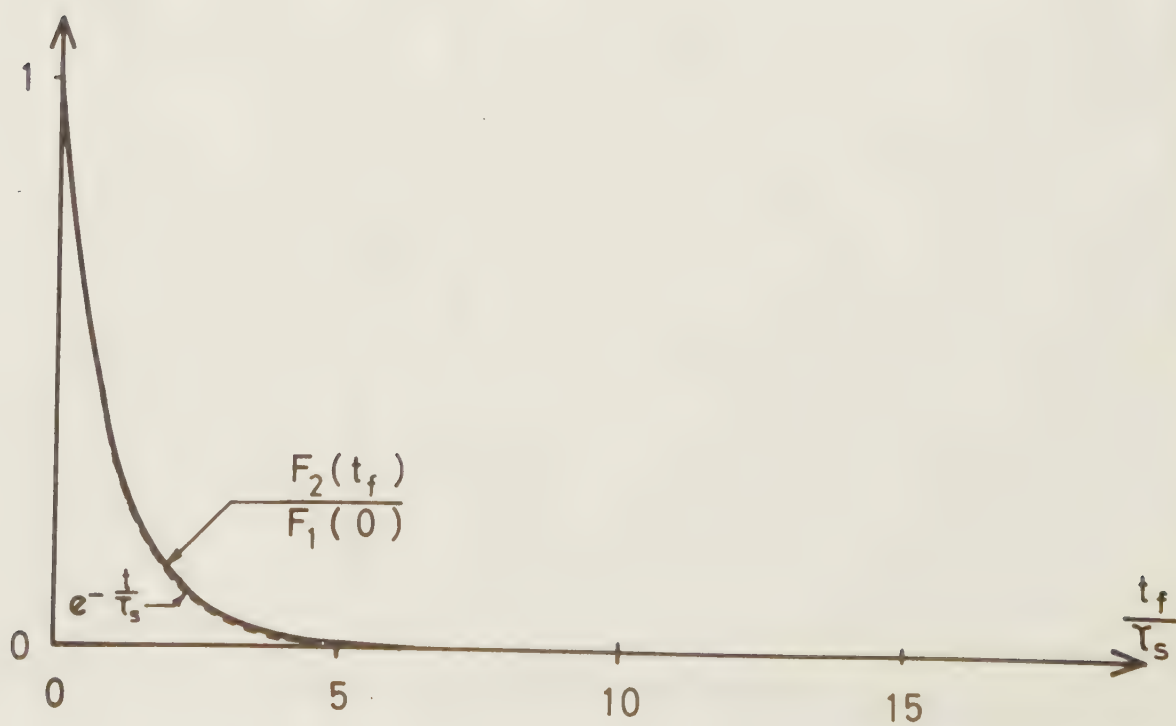


FIG. 21 : - DEFORMATION DE $\exp(-t/\tau_L)$



FIG. 22 : - DEFORMATION DE $\exp(-t/2 (1/\tau_s + 1/\tau_l) \cos \Delta m t)$

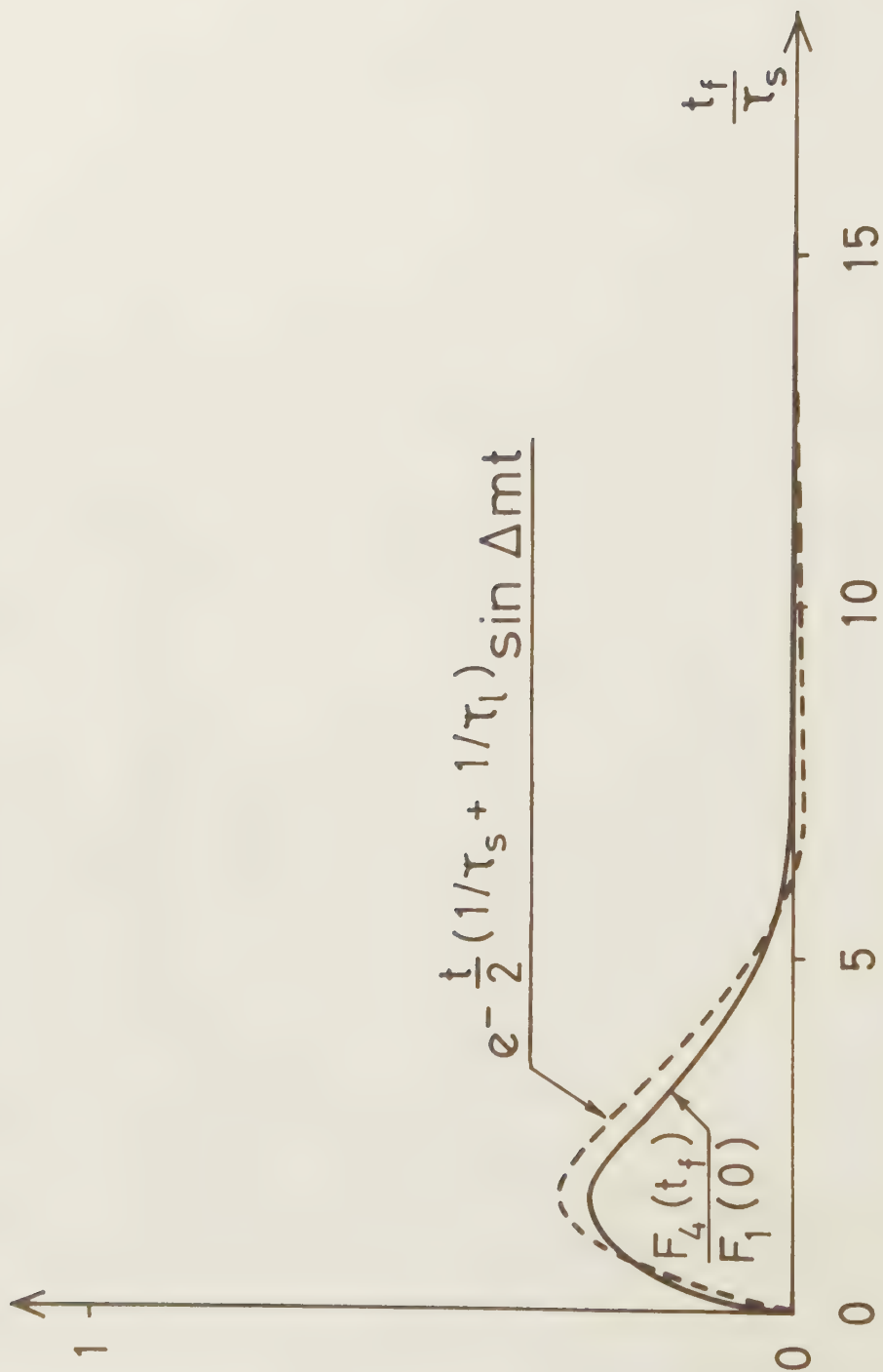


FIG. 23 : - DEFORMATION DE $\exp (-t/2 (1/\tau_s + 1/\tau_l) \sin \Delta m t)$

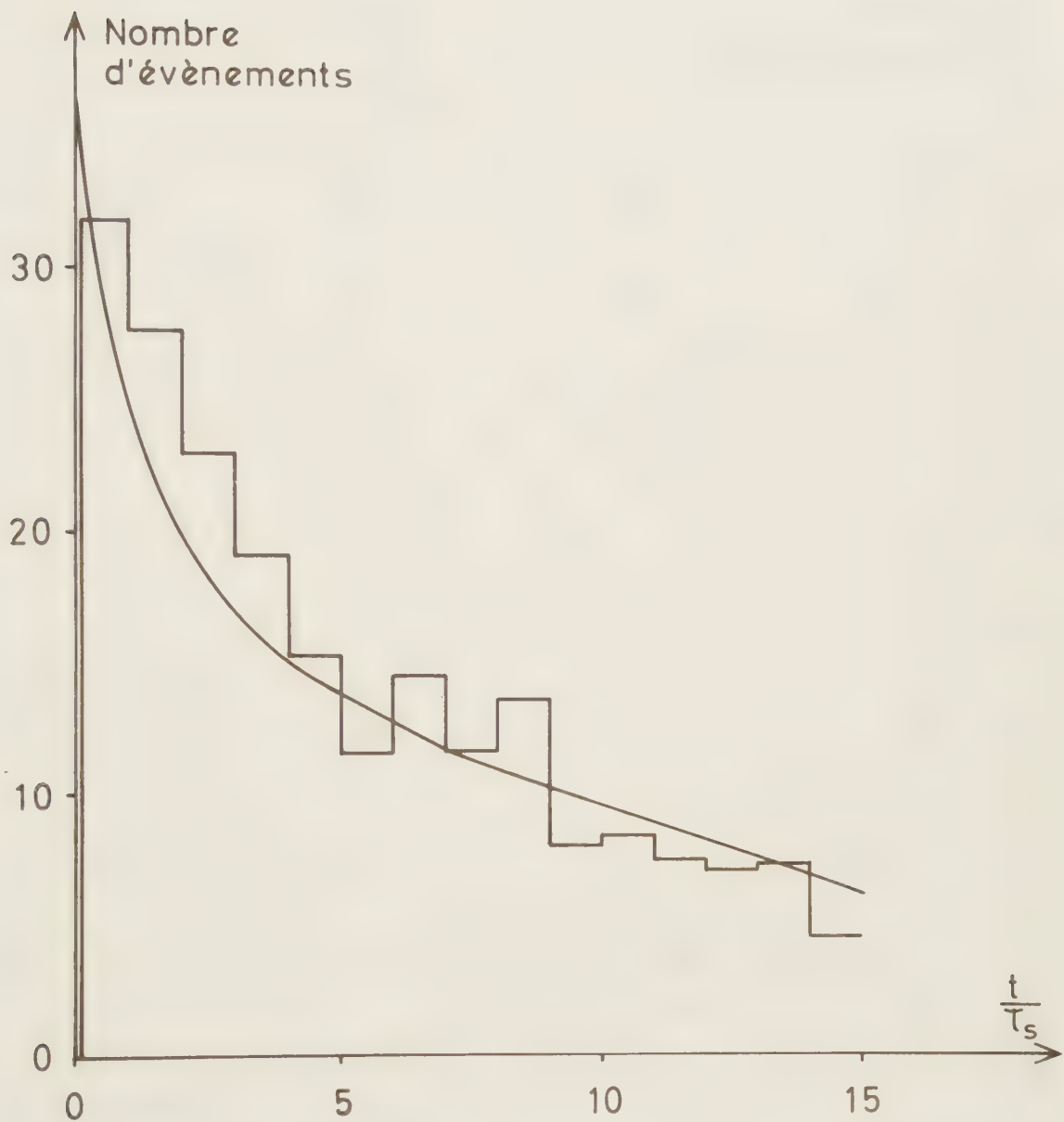


FIG. 24 : - HISTOGRAMME DES TEMPS DE VIE DES EVENEMENTS $K\beta$
 , EVENEMENTS DES DEUX SIGNES
 LA COURBE REPRESENTE LA LOI THEORIQUE NORMALISEE AU
 NOMBRE TOTAL D'EVENEMENT DANS L'HYPOTHESE OU $\Delta S = \Delta Q$

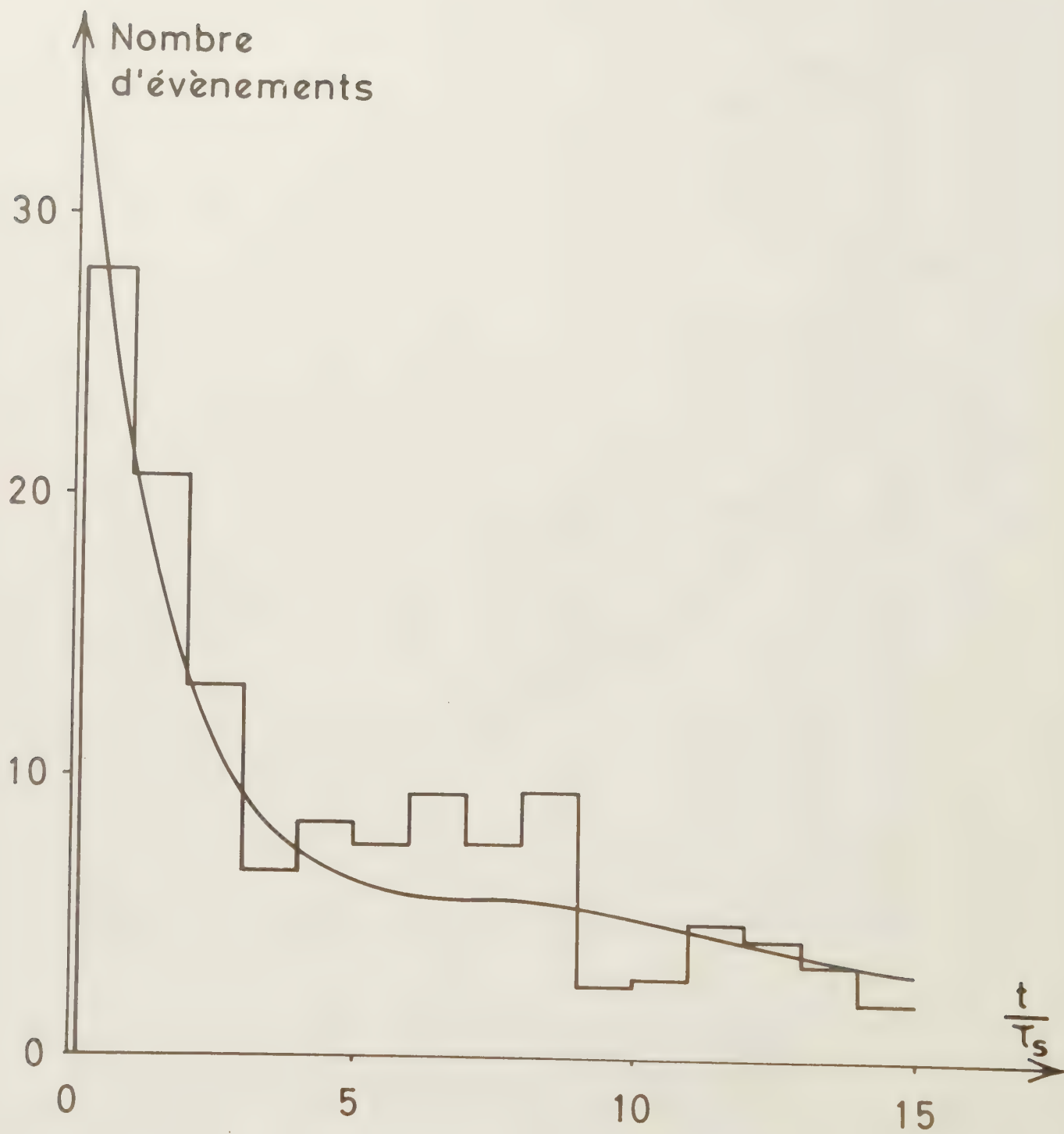


FIG. 25 : - HISTOGRAMME DES TEMPS DE VIE DES EVENEMENTS K_β
EVENEMENTS A ELECTRON POSITIF

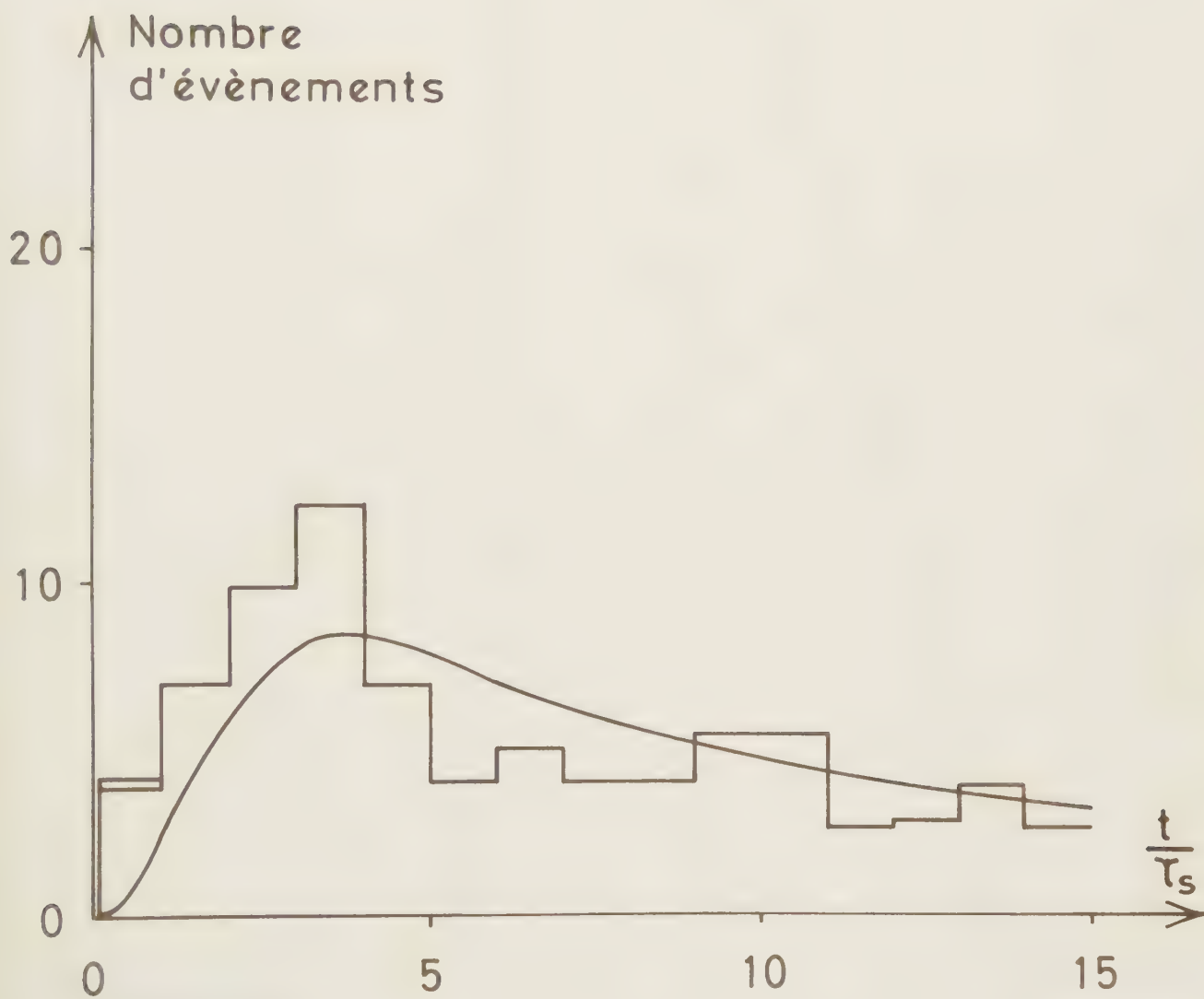


FIG. 26 : - HISTOGRAMME DES TEMPS DE VIE DES EVENEMENTS K_β
EVENEMENTS A ELECTRON NEGATIF

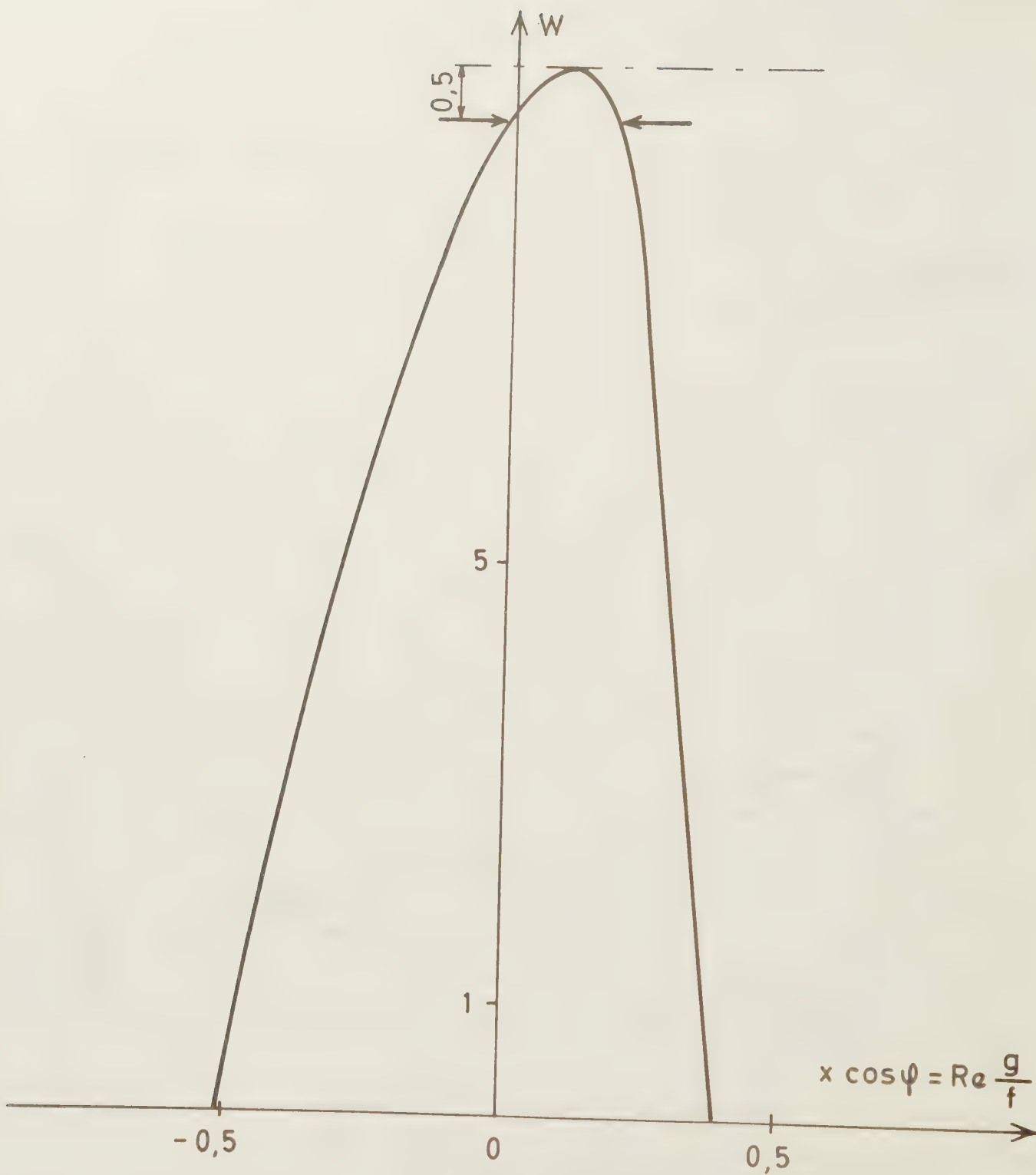


FIG. 27 : - VARIATION DE LA VRAISEMBLANCE (OPTIMISEE SUR $\text{Im } \frac{g}{f}$)
EN FONCTION DE $\text{Re } \frac{g}{f}$

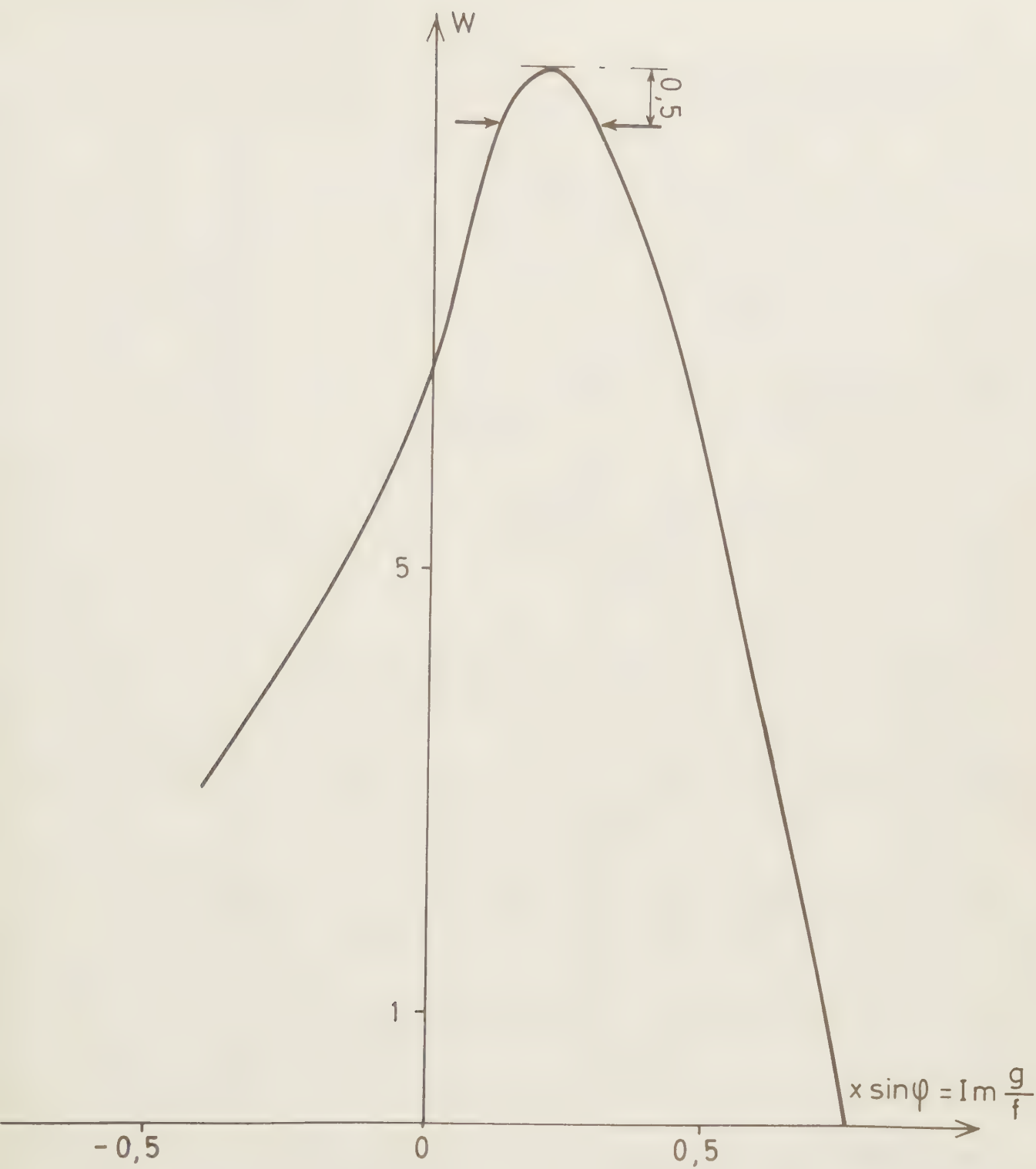


FIG.28 : - VARIATION DE LA VRAISEMBLANCE (OPTIMISEE SUR $\text{Re} \frac{g}{f}$)
EN FONCTION DE $\text{Im} \frac{g}{f}$

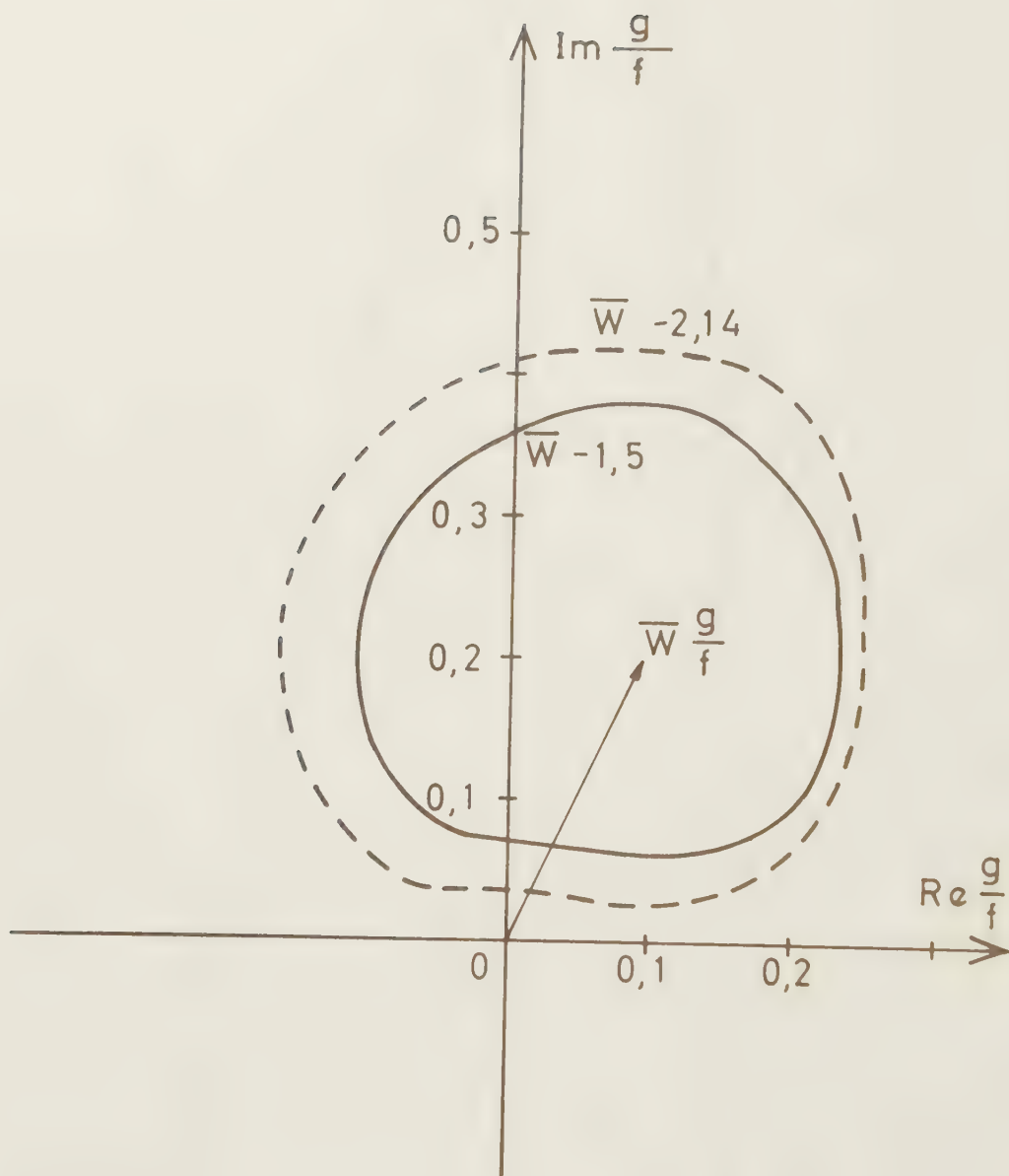


FIG. 29 : - VARIATION DE LA VRAISEMBLANCE DANS LE PLAN COMPLEXE
 EN FONCTION DE $\frac{g}{f}$
 LA COURBE EN TRAIT PLEIN ENFERME 68% DE LA PROBABILITE
 LA COURBE EN TRAIT INTERROMPU ENFERME 90% DE LA PROBABILITE

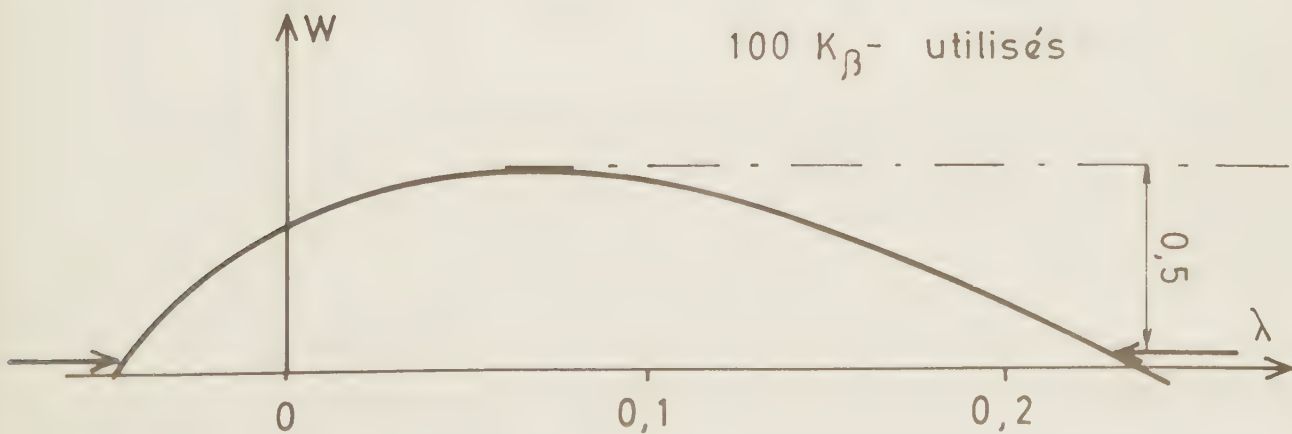
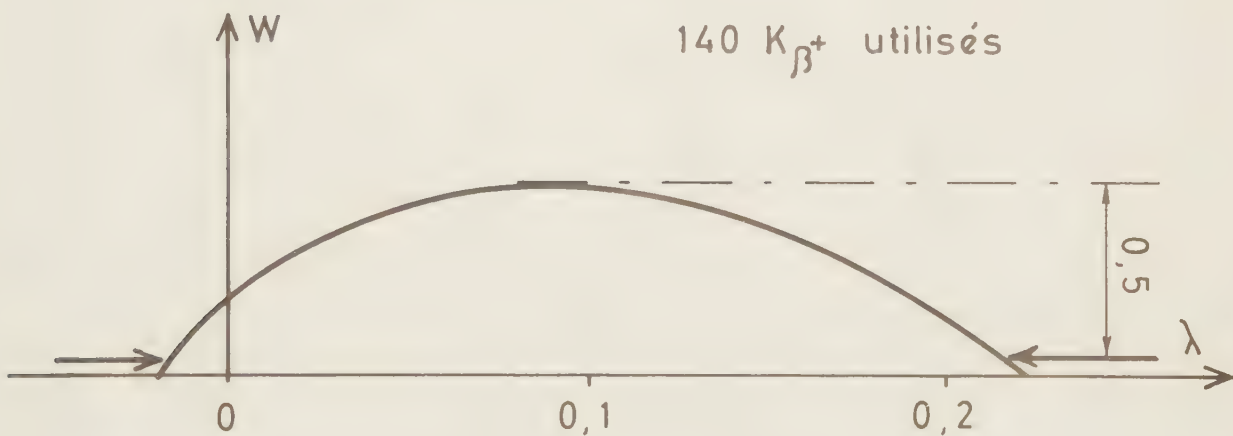
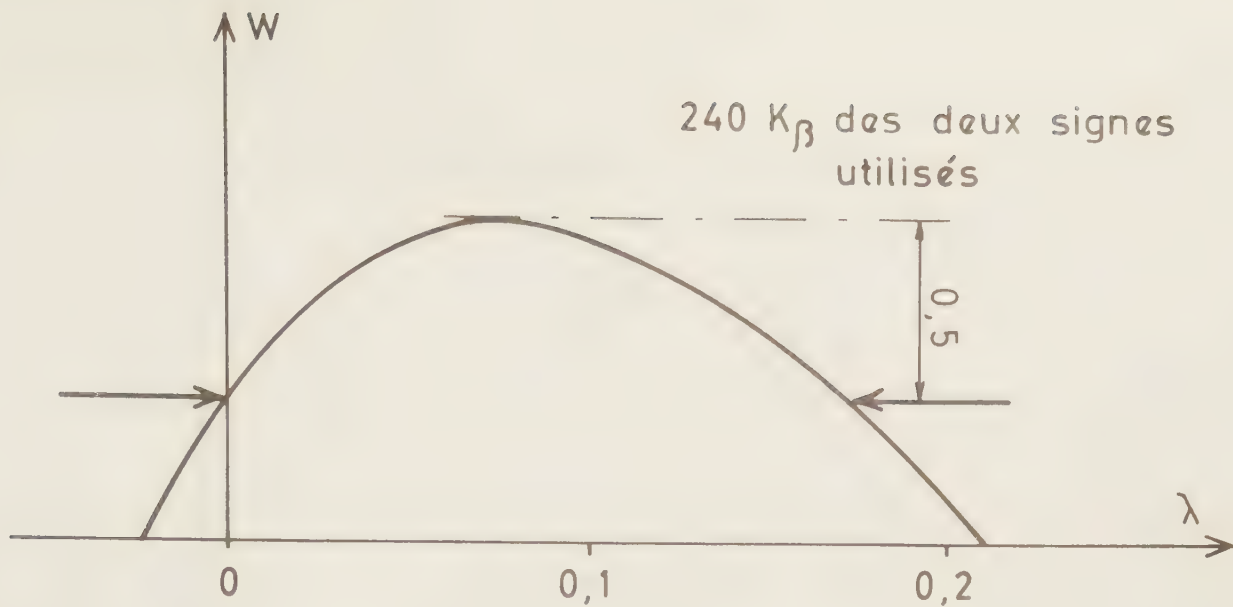


FIG. 30 : - VARIATION DE LA VRAISEMBLANCE EN FONCTION DE λ POUR DIVERS LOTS D'EVENEMENTS EXPERIMENTAUX

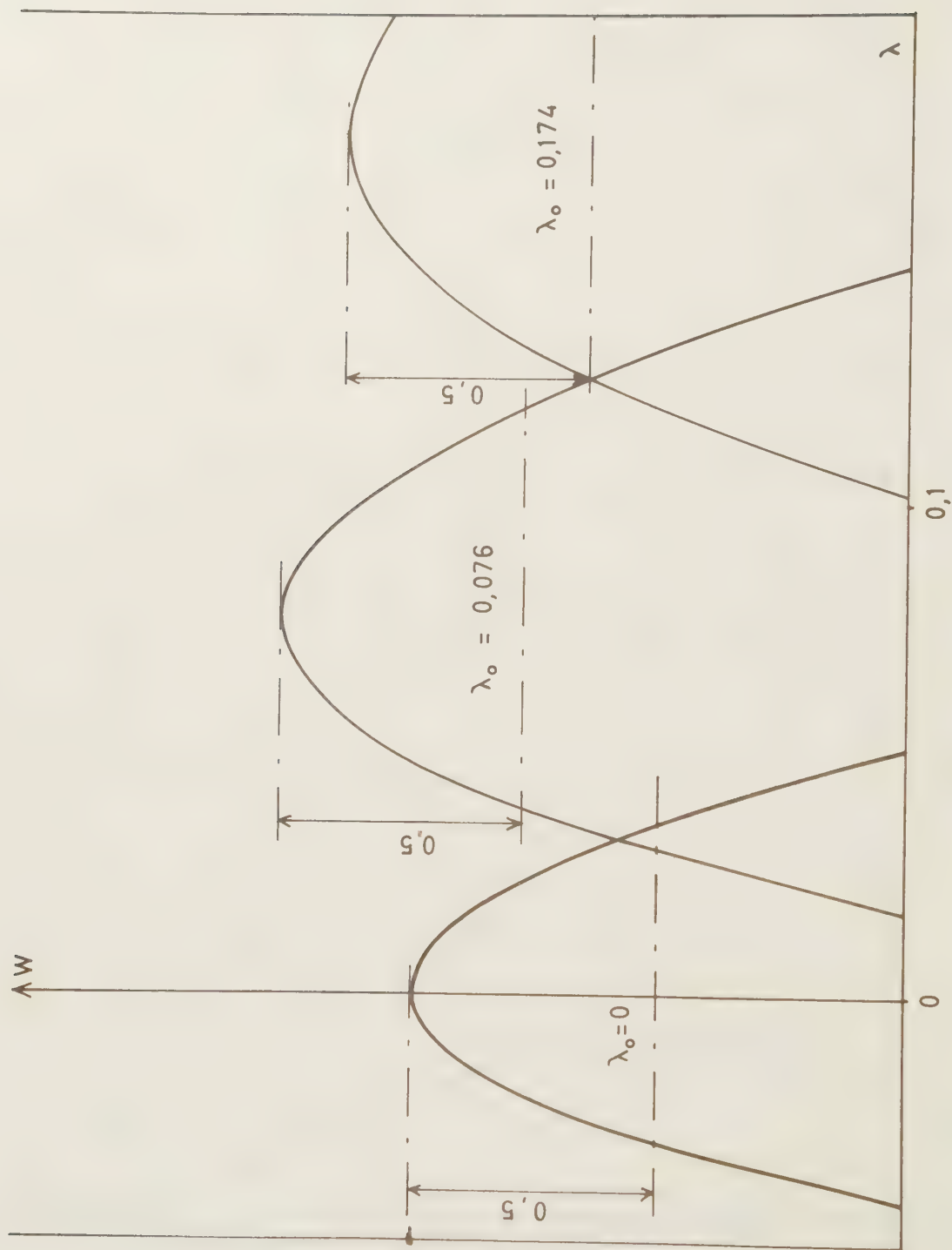


FIG. 31 : - VRAISEMBLANCE EN FONCTION DE λ POUR LES EVENEMENTS DU MONTE CARLO POUR DIVERSES VALEURS DE λ_0 SUPPOSEES VRAIES

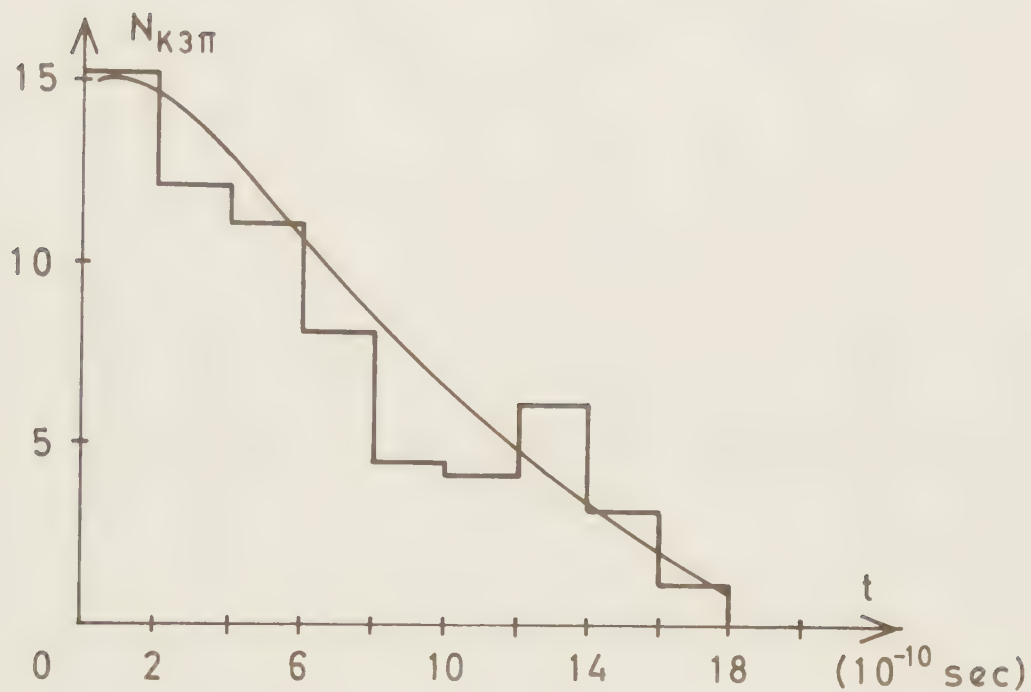


FIG. 32 : - HISTOGRAMME DES TEMPS DE VIE DES EVENEMENTS $\pi^+ \pi^- \pi^0$
 LA COURBE REPRESENTA LA LOI THEORIQUE NORMALISEE AU
 NOMBRE TOTAL d'EVENEMENT DANS L'HYPOTHESE CP CONSERVE

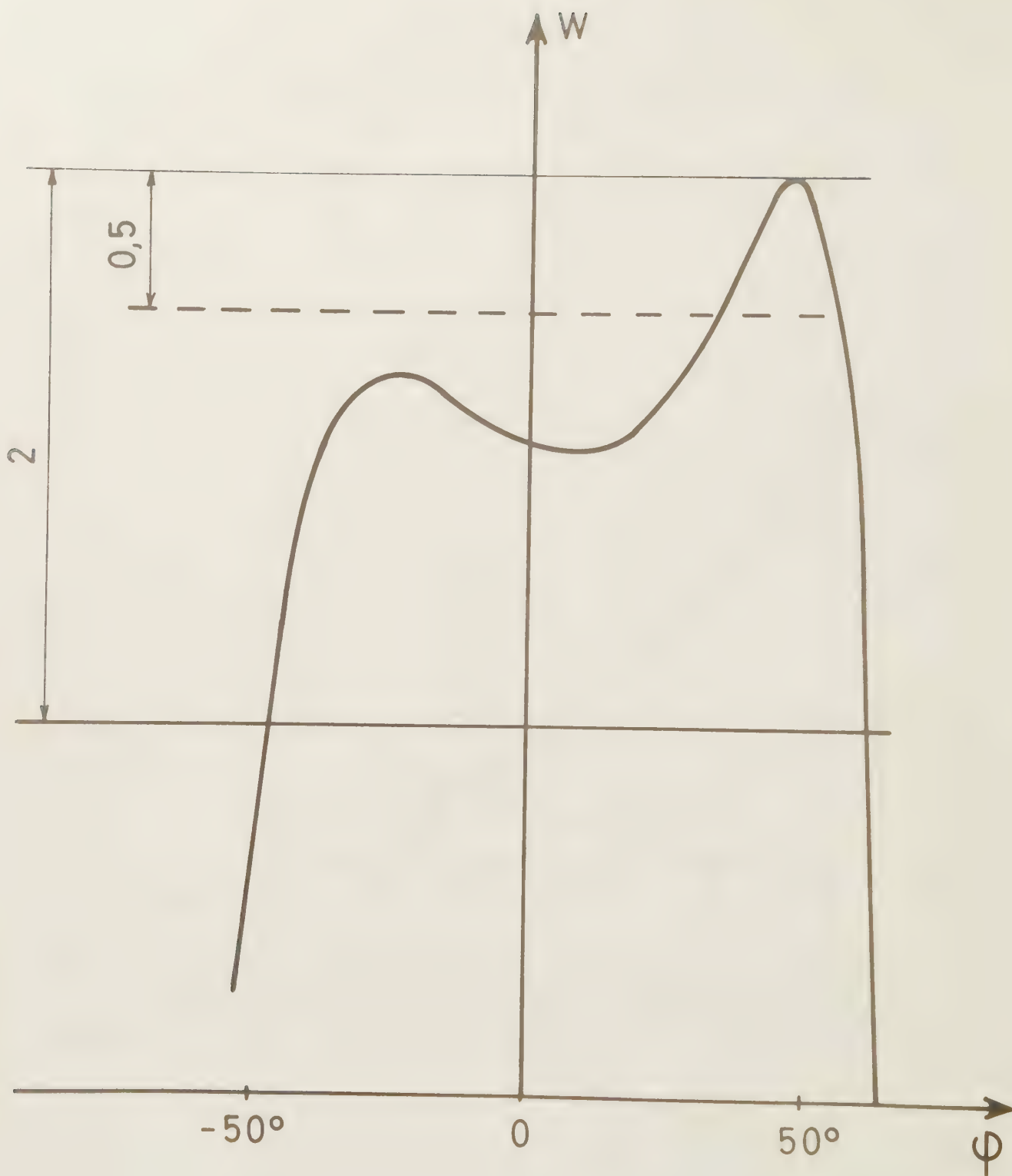


FIG. 33 : $\pi^+ \pi^- \pi^0$ VRAISEMBLANCE ETAT I - 1 SYMETRIQUE

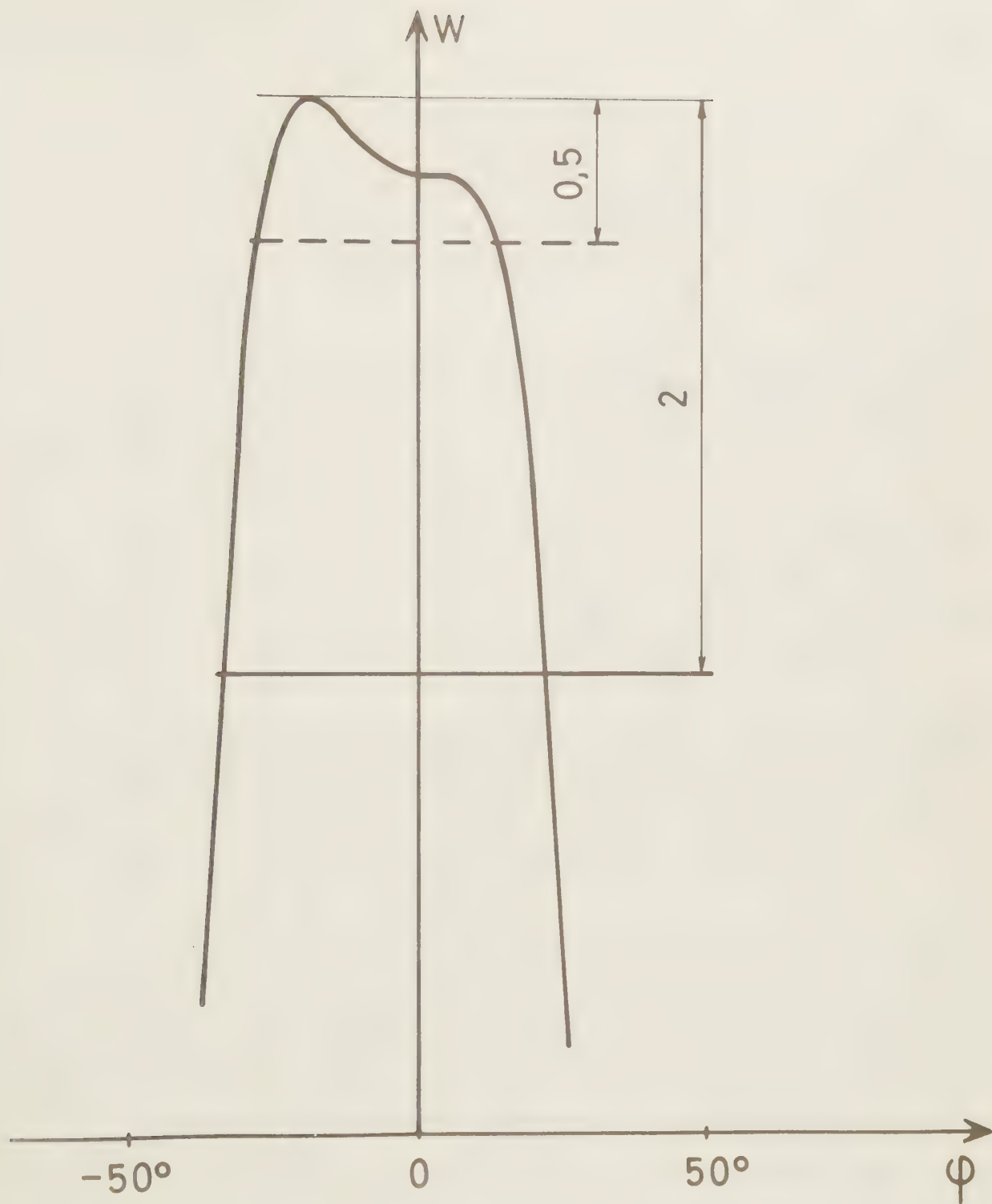


FIG. 34 : $\pi^+\pi^-\pi^0$ VRAISEMBLANCE DANS L'HYPOTHESE $\Delta I = 1/2$

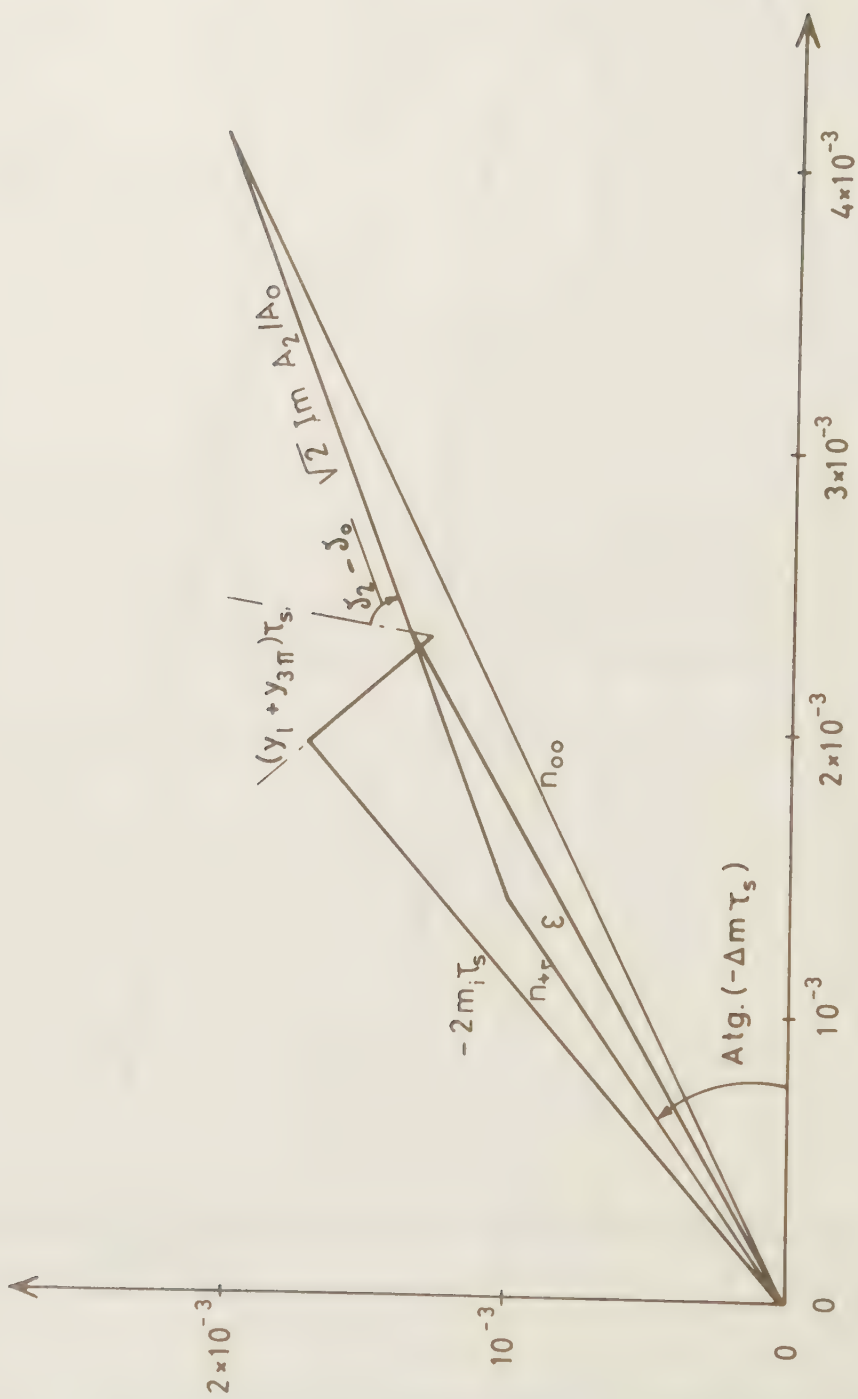


FIG. 35 : - REPRESENTATION GRAPHIQUE DE LA VIOLATION DE CP

REMERCIEMENTS

C'est tout d'abord à Monsieur le Professeur L.LEPRINCE-RINGUET que va ma reconnaissance : il m'a accueilli dans son laboratoire où j'ai pu découvrir combien passionnant et enrichissant pouvait être le travail à l'intérieur d'une équipe de physiciens bien soudée. C'est dans son laboratoire au Collège de France que cette expérience a été entreprise.

L'analyse en a été achevée à Orsay au Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire; je remercie ici Monsieur le Professeur A.BLANC-LAPIERRE qui nous y a reçus et grâce à qui nous nous sommes tout de suite intégrés dans un laboratoire dynamique et en pleine expansion.

Monsieur le Professeur A.LAGARRIGUE a suivi mes travaux depuis leur origine, je le remercie de tous les conseils qu'il m'a prodigués; c'est à son école que j'ai appris les aspects multiples de la tâche du physicien expérimentateur et j'ai plaisir à lui exprimer ici toute ma gratitude.

Que Monsieur le Professeur M.LEVY, Messieurs L.JAUNEAU et B.AUBERT soient assurés de ma reconnaissance pour la gentillesse avec laquelle ils ont accepté de discuter avec moi de nombreux problèmes théoriques et expérimentaux, ainsi que pour le temps qu'ils m'ont généreusement consacré.

Le travail présenté ici n'a pu être réalisé que grâce à la collaboration et au soutien d'une équipe de physiciens; je veux remercier tous ceux, qui, à divers titres, ont fait partie de cette équipe : Melle A.ORKIN-LECOURTOIS, Messieurs M.BLOCH, F.L.CANAVAN, M.TOMAS et tout particulièrement Mme V.BRISSON, Messieurs B.AUBERT, L.BEHR, L.M.CHOUNET, J.P.LOWYS, P.MITTNER et P.PETIAU : ils n'ont pas ménagé ni leur temps ni leur peine tout au long des quatre années consacrées à l'analyse de cette expérience.

Je veux aussi mentionner les groupes des physiciens de MILAN et PADOUE à qui je dois beaucoup.

Que Monsieur A.ASTIER, qui s'est dépensé sans compter au Collège de France, pour nous assurer les meilleures conditions de travail trouve ici l'expression de mes remerciements.

J'ai également une dette de reconnaissance envers toutes les personnes qui se sont chargées du dépouillement et des mesures des photographies: Mesdames BANASIK, GILLON, KERJOLIS, PIGOU, Mesdemoiselles OBIOL, KRIEG, RISPAL, ROUVIERE et SANNIER ainsi que Messieurs BAERT, LANCELOT et NGUEN AU LAC.

Je veux aussi remercier toutes les personnes qui ont joué un rôle dans l'élaboration et la conduite de cette expérience : les personnes qui ont contribué à la construction du faisceau, les ingénieurs et techniciens de l'accélérateur du CERN, tous ceux qui ont assuré le bon fonctionnement de la chambre à bulles, en particulier Monsieur P.RANÇON, enfin l'ensemble des mécaniciens responsables, au Collège de France, du fonctionnement des appareils de dépouillement et de mesure. Je remercie également les groupes des opérateurs des centres de calcul IBM7090 de Saclay et UNIVAC 1107 à Orsay ainsi que Messieurs BUJON et TERRANOVA qui y ont acheminé nos programmes.

Je désire exprimer ma gratitude à Mesdemoiselles M.DUCROS et C.LEDOUX pour la gentillesse avec laquelle elles m'ont aidé dans les innombrables détails matériels ou administratifs nécessités par ce travail.

Madame C.LENOBLE s'est chargée de la frappe, je la remercie ici de sa gentillesse et de sa compétence. Le tirage des figures a été fait aimablement par Monsieur BAGADY, qu'il en soit remercié.

Ce travail a été effectué grâce à une allocation attribuée par le Centre National de la Recherche Scientifique, qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

